



universität
wien

Diplomarbeit

Titel der Diplomarbeit

Thermodynamik gravitierender Systeme

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasser:	Georg Kopsky
Matrikelnummer:	0349071
Studienrichtung:	A 411 Diplomstudium Physik
Betreuer:	O. Univ.-Prof. Dr. Jakob Yngvason

Wien, am 21. 12. 2009

The Thomas-Fermi theory of atoms and stars is the only many-body problem with realistic forces to have succumbed, in the appropriate thermodynamic limit, to mankind's attempts at calculation.

Walter Thirring

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Geschichte	9
3	Grundlagen	15
3.1	Spezifische Wärme	15
3.2	Virialtheorem	16
3.3	Phasenübergänge	17
3.3.1	Klassifizierung nach Ehrenfest	18
3.4	Die Thomas-Fermi Theorie	18
3.4.1	TF Theorie für den Grundzustand	19
3.4.2	Die Thomas-Fermi Gleichung	20
3.4.3	Temperaturabhängige Thomas-Fermi Theorie	21
3.5	Homgenität, Subadditivität und Konvexität	22
4	Klassische Modelle	23
4.1	Thermodynamische Eigenschaften der Gravitation	23
4.1.1	Phänomenologie	24
4.1.2	„Ein statistisches Keplerproblem“	25
4.2	Einfache Viel Teilchen Modelle	30
4.2.1	Normale Materie	30
4.2.2	Gravitierende Materie in endlichem Volumen	31
4.2.3	Künstlicher Stern	32
4.3	Systeme mit negativer Wärmekapazität im thermischen Kontakt . .	34

4.4	Die beschränkte Aussagekraft der klassischen Modelle gravitieren- der Systeme	35
5	Quantenmechanische Modelle	37
5.1	Die Grundzustandsenergie gravitierender Fermionen	37
5.2	Die Energie als Funktion der Teilchenzahl	38
5.3	Schranken für die Grundzustandsenergie	39
5.4	Thermodynamische Instabilität	40
5.4.1	Heuristik	40
5.4.2	Die temperaturabhängige Thomas–Fermi Gleichung	41
5.4.3	Lösungen der temperaturabhängigen TF Gleichung	43
5.4.4	Thermodynamischer und hydrostatischer Druck	44
5.5	Phasenübergänge in der Thomas–Fermi Theorie	45
5.5.1	Pflugs Theorem	46
5.5.2	Existenzbeweis eines Phasenübergangs – Messer’s Beweis . . .	49
6	Abschließende Bemerkungen	57

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Untersuchung gravitierender Materie stellt sich heraus, dass für bestimmte, durchaus realistische Modellannahmen die mikrokanonische Gesamtheit und die kanonische Gesamtheit inäquivalent sind, was auf bemerkenswerte thermodynamische Eigenschaften in beiden Ensembles schließen lässt. Wie wir sehen werden, sind für die Inäquivalenz der Gesamtheiten die besonderen Eigenschaften der Gravitation verantwortlich.

Bereits in der klassischen Beschreibung eines Vielteilchensystems, das via Newtonscher Gravitation wechselwirkt, findet man im mikrokanonischen Ensemble ein Gebiet negativer spezifischer Wärme; ein Umstand, der im kanonischen Ensemble per definitionem nicht möglich ist, weswegen es nahe liegt, in diesem Gebiet einen Phasenübergang zu vermuten. Diese klassischen Systeme stellen sich jedoch aufgrund des Quantencharakters der Materie als zu unrealistische Modelle heraus, weshalb der Schritt zur quantenmechanischen Beschreibung unbedingt notwendig ist. Deshalb macht der quantenmechanische Abschnitt den Hauptteil der hier vorliegenden Arbeit aus. Als nützlich hat sich insbesondere die Thomas-Fermi-Theorie erwiesen, mithilfe derer es möglich ist, analytisch die Existenz eines Phasenübergangs zu beweisen.

In dieser Arbeit wird zum einen auf die historische Entwicklung der Begriffe,

die mit der Thermodynamik gravitierender Systeme verbunden sind, eingegangen und zum anderen eine weitgehend geschlossene Zusammenfassung der mathematischen Bemühungen auf diesem Gebiet dargeboten. Einen Höhepunkt stellt der rigorose Beweis eines Phasenübergangs in der Thomas–Fermi Theorie gravitierender Materie, basierend auf Messer’s und Pflug’s Arbeiten dar.

Die Arbeit ist also wie folgt aufgebaut. Im zweiten Kapitel findet sich eine chronologische Zusammenfassung der Ergebnisse auf dem Gebiet der nichtrelativistischen Gravitationsthermodynamik. Darauf folgen im dritten Kapitel die für das Verständnis der Methoden notwendigen Grundlagen. Das vierte Kapitel widmet sich der klassischen, d.h. nicht quantenmechanischen Modelle, sowie die Probleme, die sich daraus ergeben. Im fünften und größten Kapitel wird der Quantencharakter der Konstituenten berücksichtigt, sowie die Existenz eines Gravitationsphasenüberganges rigoros bewiesen.

Kapitel 2

Geschichte

Ein tabellarischer Abriss der Geschichte der Gravitationsthermodynamik von 1962 bis 1980 findet sich bei J. Messer in [1]. Im Jahr 1907 erschien ein Buch von Robert Emden mit dem Titel „Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie“ [2]. Darin stellt Emden die Frage, warum die spezifische Wärme c_V nicht auch negativ werden darf. Das ist meines Wissens die erste Erwähnung des Begriffs „negative spezifische Wärme“. In den darauf folgenden Jahren bis 1962 beschäftigten sich hauptsächlich zwei namhafte Personen, A. S. Eddington und S. Chandrasekhar, mit Gravitationsinstabilitäten und sagen auf der Basis klassischer Sternmodelle die Existenz negativer spezifischer Wärme bei konstantem Volumen voraus [3, 4].

1962 war dann das Jahr, in dem die ersten exakten Ergebnisse von V. A. Antonov veröffentlicht wurden [5]. Dieser beschäftigt sich mit der Entropie klassischer gravitierender Systeme und findet, dass in diesen Systemen die Entropie kein globales Maximum annehmen kann. Die Conclusio, dass es sich hierbei um „selbstheizende“ Systeme handeln könnte, findet er allerdings nicht. Sechs Jahre später, 1968, diskutieren D. Lynden-Bell und R. Wood Antonovs Ergebnisse und können als erste die Existenz negativer spezifischer Wärme zeigen [6]. Diese führt in klassischen Systemen zu einer sogenannten „gravothermalen Katastrophe“. Das bedeutet, dass die Dichte im Ursprung singulär wird und kein Gleichgewichtszustand für bestimmte

Radien des Systems existiert. Außerdem verweisen sie auf eine mögliche Verbindung eines Phasenübergangs mit der gravothermalen Katastrophe, wenn das klassische r^{-1} -Potential modifiziert wird, oder wenn der Schritt zur Quantenmechanik gegangen und Fermi-Statistik verwendet wird.

1970 leitet W. Thirring, angeregt durch einen Vortrag von F. Hoyle unabhängig von Antonov und Lynden-Bell deren Ergebnisse nochmals ab [7]. Thirring kann jedoch im Gegenteil von Lynden-Bell und Wood zeigen, dass Gleichgewichtszustände für alle Radien des Systems existieren, wenn sich das System in einem festgehaltenen Volumen befindet und das Potential im Ursprung modifiziert wird. Er ist der erste, der für klassische Systeme die Vermutung aufstellt, dass die Region negativer spezifischer Wärme, die im mikrokanonischen Ensemble auftaucht, im kanonischen Ensemble von einem Phasenübergang überbrückt wird. Noch im selben Jahr demonstrieren P. Hertel und W. Thirring die Existenz eines Phasenübergangs im kanonischen Ensemble, indem sie die temperaturabhängige Thomas-Fermi Gleichung numerisch lösen [8]. Ebenfalls 1970 können die beiden in [9] die Inäquivalenz des kanonischen und des mikrokanonischen Ensemble für gravitierende klassische Systeme zeigen.

Ein Jahr später, 1971 berechnen ebenfalls P. Hertel und W. Thirring in einem geeigneten thermodynamischen Limes die freie Energie eines Systems aus nicht-relativistischen Fermionen, die untereinander via $1/r$ -Potentiale wechselwirken. Dabei stellen sie fest, dass die effektive Feldnäherung in diesem Limes exakt wird und auf die temperaturabhängigen Thomas-Fermi Gleichung führt [10]. Im darauf folgenden Jahr erscheinen zwei Artikel zum Thema. Im ersten berechnen P. Hertel, H. Narnhofer und W. Thirring die Energie als Funktion der Entropie, sowie die freie Energie in Abhängigkeit der Temperatur für geladene, nichtrelativistische Fermionen mit $(ee' - \kappa MM')/|x - x'|$ -Wechselwirkungen. Dabei argumentieren sie, dass die Thomas-Fermi Gleichung in einem geeigneten thermodynamischen Limes exakt wird [11]. Der zweite Artikel in diesem Jahr von Aronson und Hansen ist wieder den klassischen Modellen gewidmet und beschäftigt sich mit der Feststellung von Lynden-Bell, Wood und Thirring, dass Gleichgewichtszustände immer existieren, falls das Potential im Ursprung modifiziert wird. Auf der Basis von Computer-

berechnungen argumentieren sie, dass ein System aus klassischen gravitierenden harten Kugeln einen Phasenübergang im kanonischen Ensemble aufweisen sollte [12].

Im Jahr 1978 beschreibt J. Messer ein System nichtrelativistischer gravitierender Fermionen im großkanonischen Ensemble. Er kann rigoros zeigen, dass in einem geeigneten thermodynamischen Limes der Druck gegen den hydrostatischen Druck konvergiert und die zugehörige Thomas–Fermi Gleichung exakt wird [13].

In den Jahren 1980–81 erscheinen mehrere Ergebnisse auf dem Gebiet der Gravitationsthermodynamik: A. Pflug kann analytisch die Existenz eines Phasenübergangs für gravitierende Fermionen beweisen. Allerdings vereinfacht er die Modellannahmen dahingehend, dass er geeignet reskalierte Observable des Thomas–Fermi Systems im Limes eines infiniten Volumen betrachtet (s. [14], sowie Kapitel 5.5).

H. Narnhofer und W. Thirring beweisen in [15] mittels Entropie–Ungleichungen mit kohärenten Zuständen, dass die temperaturabhängigen Thomas–Fermi Theorie für Atome und Moleküle bei geeigneter Skalierung im Limes $Z \rightarrow \infty$ exakt wird.¹

W. Thirrings Buch „A course in mathematical physics“ [17] erscheint im Jahr 1980, wobei sich im 4. Band der Reihe eine Zusammenfassung der meisten Ergebnisse auf dem Gebiet gravitierender Materie findet.

J. Messer analysiert in [18] den Phasenübergang 1.Ordnung in einem infiniten System aus gravitierenden Fermionen im kanonischen Ensemble. Er beweist analytisch die Existenz des Phasenübergangs, indem er die Thomas–Fermi Gleichung, die das infinite System exakt beschreibt, in drei Gleichungen zerlegt. Diese drei Gleichungen (λ –, μ – und n –Gleichung) beschreiben gemeinsam das Thomas–Fermi Modell. Diese Methode wird ausführlich in Kapitel 5.5.2 dieser Arbeit behandelt. Kurz darauf erscheint Messers Buch „Temperature Dependent Thomas–Fermi Theory“ [1]. Darin findet sich eine Zusammenfassung seiner und anderer exakter Ergebnisse im Zusammenhang mit rein kosmischen Körpern, d.h. mit Systemen, bei denen die elektrostatische Wechselwirkung gegenüber der gravitativen vernachlässigbar ist.

¹Es findet sich in diesem Beweis eine kleine Lücke, die 2003 von Yngvason und Hauksson in [16] geschlossen wird.

Zwei Jahre später, 1983, beschäftigt sich P. Landsberg mit der Frage, ob ein Gleichgewicht immer einem Maximum der Entropie entspricht. Er behauptet, dass im Falle langreichweitiger und daher nicht extensiver Kräfte manche thermodynamischen Resultate nicht mehr haltbar seien [19]. Landsberg betrachtet in seinen Darstellungen auch relativistische Systeme wie Schwarze Löcher.

1990 untersuchen H. Narnhofer, H. Posch und W. Thirring die Dynamik klassischer Teilchen, die über ein Gauss-Potential miteinander wechselwirken. Sie vergleichen Computersimulationen mit bestehenden Theorien und entdecken, dass die kondensierte Phase eine stationäre Lösung der Vlasov-Gleichung ist, die Vlasov-Dynamik aber nicht den Kollaps selbst beschreiben kann [20].

Ebenso 1990 erscheint ein Übersichtsartikel von T. Padmanabhan [21], in dem eine Zusammenfassung der wichtigsten klassischen Modelle behandelt wird. Des weiteren untersucht T. Padmanabhan das Erreichen eines Gleichgewichtszustandes gravitierender Systeme ausgehend von der Boltzmann-Gleichung. Bei der Behandlung der klassischen Modelle wird sich die vorliegende Arbeit an diesem Artikel orientieren.

Fast zehn Jahre später, 1999, veröffentlicht D. Lynden-Bell eine Zusammenfassung des Verständnisses der Gravitationsthermodynamik beginnend mit Antonovs Ergebnissen [22]. Lynden-Bell bezieht sich allerdings oft auf relativistische Systeme, die von Hawking, Beckenstein, u.a. behandelt wurden. Er behauptet, dass jeder Phasenübergang 1. Ordnung durch ein Gebiet negativer spezifischer Wärme im mikrokanonischen Ensemble erklärt werden kann. Weiters gibt er Beispiele, wie Ionisierung, chemische Dissoziation und van der Waals-Gase an, wo er behauptet, solche Gebiete mit $c < 0$ gefunden zu haben. W. Thirring widerspricht bei Diskussionen mit mir [23] (2009) dieser Behauptung, ohne aber Gegenargumente zu bringen.

Das Ende des historischen Abschnittes markieren zwei Artikel von H. Posch und W. Thirring [24, 25] aus den Jahren 2005 und 2006. Sie untersuchen das Verhalten eines einzelnen klassischen Teilchens in einem Newton-Potenzial und konstruieren ein „Sprungtuch“, an dem das Teilchen so reflektiert wird, dass das System ein Gebiet negativer spezifischer Wärme aufweist. Außerdem simulieren sie das Ver-

halten mehrerer Teilchen ($N \sim 400$) mit rein attraktiven Wechselwirkungen. Hier finden sie den von der Theorie vorhergesagten Phasenübergang.

W. Thirring meint zum weiteren Verlauf der Forschungen, dass „[...] man das mit der negativen spezifischen Wärme jetzt getrost den Experimentatoren überlassen kann.“ [23].

Kapitel 3

Grundlagen

Im folgenden werden die für das Verständnis dieser Arbeit grundlegenden Methoden und Begriffe kurz erklärt.

3.1 Spezifische Wärme

Aus der Thermodynamik ist der folgende Ausdruck für die differentielle Wärmemenge bekannt:

$$\delta Q = dU + PdV \quad , \quad (3.1.1)$$

wobei δQ die differenzielle Wärmemenge, U die innere Energie, P der Druck und V das Volumen des betrachteten Systems darstellen. Diese Relation lässt sich nun ausschreiben:

$$\delta Q = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_T \right] dx + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_x + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x \right] dT \quad , \quad (3.1.2)$$

wobei x eine Zustandsgröße wie z.B. Druck oder Volumen darstellt und T die Temperatur.

Betrachtet man in (3.1.2) eine Kurve längs derer $x = \text{const}$ gilt, so ergibt sich

$$\delta Q|_x = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_x + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x \right] dT \quad , \quad (3.1.3)$$

wobei der Klammerausdruck die *Wärmekapazität* C_x bei festem x definiert, also

$$C_x := \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_x + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x . \quad (3.1.4)$$

Die Wärmekapazität pro Mol C_x/M wird als *spezifische Wärme* c_x bezeichnet.¹ Im kanonischen Ensemble ist die spezifische Wärme stets positiv. Dies erkennt man aus dem Zusammenhang zwischen der Entropie S , der freien Energie F und der spezifischen Wärme:

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V , \quad c_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V > 0 \quad (3.1.5)$$

wegen der Konkavität der freien Energie.

Für polytrope Prozesse, also Zustandsänderungen idealer Gase, wo

$$x = PV^\kappa = \text{const} \quad (3.1.6)$$

mit einem sogenannten Polytropenexponent κ gilt, ergibt sich die Wärmekapazität längs einer polytropen Kurve zu

$$C_x = C_V - \frac{nR}{\kappa - 1} . \quad (3.1.7)$$

Für $\kappa \rightarrow \infty$ geht $C_x \rightarrow -\infty$ und für $\kappa \rightarrow 0$ geht $C_x \rightarrow C_V + nR$. Man erkennt also, dass das Vorzeichen von C_x vom Wert des Polytropenexponent κ abhängt. Es gibt also Variable x wo man sich nicht wundert, dass die entsprechende spezifische Wärme negativ ist. Für alle in der gewöhnlichen Thermodynamik behandelten Modelle ist die spezifische Wärme c_V allerdings positiv. Wie man im Folgenden sehen wird, ist dies für Modelle, bei denen die gravitative Wechselwirkung dominiert, nicht unbedingt der Fall.

3.2 Virialtheorem

Für ein N -Teilchensystem ist das *Virial* \mathcal{R} gegeben durch

$$\mathcal{R} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j \cdot \vec{x}_j . \quad (3.2.1)$$

¹In dieser Arbeit wird oft die spezifische Wärme anstatt der Wärmekapazität verwendet, was aber bis auf einen multiplikativen Faktor keinen Unterschied macht

Falls das Virial für alle Zeiten beschränkt bleibt, gilt für die über die Zeit gemittelte kinetische Energie

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \overline{\vec{F}_j \cdot \vec{x}_j} \quad . \quad (3.2.2)$$

Existiert weiters für die Kräfte \vec{F}_j ein Potential, dass homogen vom Grad η ist, d.h. $U(\alpha\vec{x}) = \alpha^\eta U(\vec{x})$, so gilt für die mittlere kinetische Energie folgender einfacher Zusammenhang:

$$\bar{K} = \frac{\eta}{2} \bar{U} \quad . \quad (3.2.3)$$

Das Newtonsche Gravitationspotential, das für diese Arbeit maßgeblich ist, ist vom Grad -1 , woraus sofort

$$\bar{K} = -\frac{\bar{U}}{2} \quad (3.2.4)$$

folgt. Es gilt also für die Gesamtenergie

$$\bar{E} = \bar{K} + \bar{U} = \frac{1}{2} \bar{U} \quad . \quad (3.2.5)$$

Zieht sich ein gravitierendes System nun zusammen, wird die Gesamtenergie immer kleiner, d.h. $\bar{U}/2 \rightarrow -\infty$. Dabei geht aber gleichzeitig die kinetische Energie $\bar{K} \rightarrow +\infty$. In der klassischen statistischen Mechanik wird die Temperatur mit einer mittleren kinetischen Energie assoziiert, also folgt bereits aus dem Virialsatz die Existenz sogenannter selbstheizender Systeme. (Eine genauere Herleitung des Virialtheorems findet sich bei Landau in [26], S.29 ff)

3.3 Phasenübergänge

Der Begriff der Phase ist weit schwieriger zu definieren als der Begriff des Phasenüberganges. Ein Phasenübergang lässt sich definieren als Nichtanalytizitätsgebiet einer bestimmten thermodynamischen Größe. Für gewisse Anwendungen liefern die Yang–Lee Theoreme [27] eine Antwort, wo mit Sicherheit kein Phasenübergang stattfinden kann. Die Yang–Lee Theoreme können einzelnen Phasen Analytizitätsgebiete der großkanonischen Zustandssumme zuordnen, indem sie komplexe

Fugazitäten zulassen. In der hier vorliegenden Arbeit wird es von Interesse sein, welcher Ordnung ein Phasenübergang entspricht.

3.3.1 Klassifizierung nach Ehrenfest

Phasenübergänge können nach Ehrenfest folgendermaßen klassifiziert werden. Die niedrigste Ordnung des Differentialquotienten der Gibbschen freien Energie G , der beim Überschreiten der Koexistenzlinie zwischen zwei Phasen eine Diskontinuität aufweist, definiert die *Ordnung des Phasenübergangs*. In Formeln bedeutet ein Phasenübergang *n-ter Ordnung*

$$\left(\frac{\partial^m G_\alpha}{\partial y^m}\right)_x = \left(\frac{\partial^m G_\beta}{\partial y^m}\right)_x \quad (3.3.1)$$

und

$$\left(\frac{\partial^n G_\alpha}{\partial y^n}\right)_x \neq \left(\frac{\partial^n G_\beta}{\partial y^n}\right)_x, \quad (3.3.2)$$

für $m = 1, 2, \dots, n-1$, wobei x, y zwei unterschiedliche thermodynamische Variable, wie z.B. Druck und Temperatur sind und α, β zwei unterschiedliche Phasen. (Für mehr Details, siehe z.B. [28] und [29])

3.4 Die Thomas-Fermi Theorie

Die folgenden Grundlagen der temperaturunabhängigen Thomas–Fermi Theorie (= TF Theorie) normaler Materie sind stark angelehnt an die Vorlesung „Quantenmechanik großer Systeme“ von J. Yngvason. Die weiteren Ausführungen über die temperaturabhängige TF Theorie gravitierender Materie finden sich in dem Buch „Temperature Dependent Thomas–Fermi Theory“ von J. Messer [1] und einen sehr guten Überblick über die TF Theorie sowie den damit verwandten Theorien liefert E. Lieb in [30].

3.4.1 TF Theorie für den Grundzustand

Wir betrachten zunächst Coulombartige Wechselwirkungen. Dabei werden positive Funktionen ρ betrachtet, die als Elektronendichten interpretiert werden.

Definition 3.4.1. *des Thomas–Fermi Energiefunktionals:*

$$\mathcal{E}^{TF}[\rho] := \int \tau(\rho(x))dx - \int V(x)\rho(x)dx + D(\rho, \rho) + U \quad . \quad (3.4.1)$$

Das erste Integral über τ stellt eine Approximation der kinetischen Energie dar, wobei $\tau(\rho(x)) = \text{const} \cdot \rho^{5/3}(x)$ im nichtrelativistischen Fall ist. Das zweite Integral über $V\rho$ beschreibt die Wechselwirkung mit den Kernen und der Term $D(\rho, \rho)$ ist eine Näherung für die Abstoßung der Elektronen untereinander.

$V(x)$ ist definiert durch

$$V(x) := \sum_{k=1}^K \frac{Z_k}{|x - X_k|} \quad . \quad (3.4.2)$$

Z_k bzw. X_k ist die Ladung bzw. die Position des k -ten Kernels und es gibt insgesamt K Kerne. $D(\rho, \rho)$ ist durch

$$D(\rho, \rho) := \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x - y|} dx dy \quad (3.4.3)$$

definiert. Der letzte Term U stellt die Abstoßung der Kerne dar und ist gegeben durch

$$U = \sum_{k < l} \frac{Z_k Z_l}{|X_k - X_l|} \quad . \quad (3.4.4)$$

\mathcal{E}^{TF} ist ein nichtlineares Funktional auf einem ∞ -dimensionalen Kegel von Funktionen (Details, siehe z.B. [1] oder [31]). Von diesem Funktional möchte man vor allem wissen,

- für welche Funktionen ρ das Funktional $\mathcal{E}^{TF}[\rho]$ definiert ist,
- ob $E^{TF} := \inf \{ \mathcal{E}^{TF}[\rho] : \int \rho(x)dx = N, \rho \geq 0 \} > -\infty$ ist,
- ob ρ^{TF} , definiert durch $\mathcal{E}^{TF}[\rho^{TF}] = E^{TF}$ existiert und
- ob ρ^{TF} eindeutig ist.

3.4.2 Die Thomas–Fermi Gleichung

Aus dem Variationsproblem $d\mathcal{E}[\rho] = 0$ lässt sich die sogenannte Thomas–Fermi Gleichung für den Grundzustand

$$\tau'(\rho(x)) - [\Phi_\rho(x) - \mu]_+ = 0 \quad (3.4.5)$$

herleiten, wobei μ ein Lagrange–Multiplikator ist und Φ_ρ formal durch $\Phi_\rho(x) := V(x) - \rho * |x|^{-1}$, also dem Potential und der Faltung der Dichte mit $|x|^{-1}$ definiert ist und ein effektives Potential darstellt. Gleichung (3.4.5) ist eine nichtlineare Integralgleichung.

Beim Übergang zur TF Theorie mit ausschließlich gravitativer Wechselwirkung interessiert uns hier in dieser Arbeit nur eine elektrisch neutrale Teilchensorte (wie z.B. Neutronen), weswegen das Energiefunktional nur noch den kinetischen Energieterm, sowie einen Term für die Beschreibung der Anziehung untereinander enthält, also,

$$\mathcal{E}_{grav}^{TF}[\rho] := \int \tau(\rho(x))dx + \int W(x)\rho(x)dx \quad , \quad (3.4.6)$$

wobei $W(x) = - \int \frac{\rho(x')}{|x-x'|} d^3x'$ das von der Dichte ρ am Ort x' erzeugte Potential ist. Der Hauptunterschied dieses Energiefunktional zu dem der für Atome und Moleküle ist der, dass das Funktional für gravitierende Systeme nicht konvex ist, woraus folgt dass es keinen eindeutigen Minimierer geben muß. Eine weitere spezielle Eigenschaft ist das Verhalten der Energie als Funktion der Teilchenzahl. Wie bereits erwähnt, geht $\tau(\rho)$ wie $\rho^{(5/3)}$ und ρ selbst wie $N/(R^3)$, also geht das Energiefunktional wie $N^{(5/3)}/R^2 - \kappa N^2/R$. Dann ist der Radius $R \propto N^{(-1/3)}$ und somit die Energie $E \propto -\kappa N^{(7/3)}$. Eine Erweiterung der TF Theorie auf gravitierende Systeme mit relativistischen Teilchengeschwindigkeiten findet man bei Lieb und Yau in [32, 33]. Hier ist der Term der kinetischen Energie im Energiefunktional gegeben durch $\tau(\rho) \equiv \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\rho^{(1/3)}} [(p^2 + m^2)^{(1/2)} - m] p^2 dp$, wobei m die Teilchenmasse ist. Die Euler–Lagrange Gleichung schreibt sich dann als

$$\tau'(\rho) = [\rho^{(2/3)} + m^2]^{(1/2)} - m \quad . \quad (3.4.7)$$

3.4.3 Temperaturabhängige Thomas–Fermi Theorie

Zunächst zeichnet sich die temperaturabhängige TF Theorie dadurch aus, dass sie im Grenzfall verschwindender Temperatur in die gerade besprochene Grundzustands–TF Theorie übergeht. Im Falle gravitierender Systeme schreibt sich die TF Gleichung für das großkanonische Ensemble und für gegebene Temperatur, Teilchenzahl und Volumen $(\beta, N, |\Lambda|)$ als

$$\rho(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \{1 + \exp \{ \beta (p^2/2m + W(x) - \mu) \} \}^{-1} \quad (3.4.8)$$

wobei das chemische Potential durch

$$\int_{|\Lambda|} \rho(x) d^3x = N \quad (3.4.9)$$

bestimmt wird. Das Potential ist hier folgendermaßen definiert:

$$W(x) = -\kappa m^2 \int_{|\Lambda|} \frac{\rho(x') d^3x'}{|x - x'|} \quad (3.4.10)$$

Die Selbstkonsistenzgleichungen (3.4.8,3.4.9) gehen aus der Variation des freien Energiefunktional

$$\mathcal{F}[\rho] = -\frac{1}{\beta} \int_{|\Lambda|} d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\beta(p^2/2m + W(x) - \mu)}) - \frac{1}{2} \int_{|\Lambda|} d^3x \rho(x) W(x) + N\mu \quad (3.4.11)$$

hervor, weshalb Lösungen der Gleichung (3.4.8) dieses Funktional minimieren. Diese Darstellung der TF Gleichung wird uns in dieser Arbeit hauptsächlich beschäftigen (siehe Kapitel 5.5.2).

Die TF Theorie stellt gewissermaßen die „Urmutter“ aller Dichtefunktionaltheorien dar, da sie die erste und einfachste Formulierung einer quantenmechanischen Vielteilchentheorie ist, die Dichten als zentrales Element enthält.

3.5 Homogenität, Subadditivität und Konvexität

Theorem 3.5.1. *Sei $x \mapsto f(x)$ eine Abbildung eines konvexen Kegels $K \subset \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R} und sei weiters $f(0) = 0$. Dann implizieren zwei der folgenden Eigenschaften die jeweils dritte:*

$$\text{Homogenität} \quad H : f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Subadditivität} \quad S : f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$$

$$\text{Konvexität} \quad K : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad , \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Beweis Der Beweis ist kurz und klar nachvollziehbar und bedarf daher keiner weiteren Erklärung:

$$\begin{aligned} S \wedge H \Rightarrow K & : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \stackrel{S}{\leq} f(\lambda x_1) + f((1 - \lambda)x_2) \stackrel{H}{=} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ K \wedge H \Rightarrow S & : f(\lambda x_1) + f((1 - \lambda)x_2) \stackrel{H}{=} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \stackrel{K}{\geq} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ K \wedge S \Rightarrow H & : f(\lambda x) \stackrel{K}{\leq} \lambda f(x) \quad , \quad \lambda \leq 1, \quad f(Nx) \stackrel{S}{\leq} Nf(x) \Rightarrow f(\lambda x) \stackrel{S}{\geq} \lambda f(x) \quad , \quad \lambda := \frac{1}{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Nf(Mx) = f(NMx) = Mf(Nx)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}^+ \quad \xrightarrow{K \Rightarrow \text{Stetigkeit}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \square$$

Dieses rein mathematische Theorem wird uns, mitsamt seinem Beweis, bei der Frage nach der Stabilität gravitierender Materie beschäftigen, wo die Energie als Funktion der Entropie, Teilchenanzahl und des Volumens nicht mehr homogen vom Grad 1 sein wird, wie dies im Falle normaler Materie noch gegeben ist. Eine Übersicht über die Zusammenhänge der hier genannten Begriffe findet sich in [19].

Kapitel 4

Klassische Modelle

Das nun folgende Kapitel ist stark angelehnt an die Ausführungen Padmanabhan's in [21], sowie im speziellen an die Arbeiten von Thirring in [7] und Hertel und Thirring in [9].

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist jeweils ein N -Teilchensystem mit der Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - \sum_{i<j}^N |\vec{x}_i - \vec{x}_j|^{-1} \quad . \quad (4.0.1)$$

4.1 Thermodynamische Eigenschaften der Gravitation

Die klassische Newtonsche Gravitation bereitet, wie wir gleich sehen werden, vor allem aufgrund der Langreichweitigkeit des $(-1/r)$ -Potentials und der prinzipiellen Unmöglichkeit, sie abzuschirmen, Probleme bei der statistischen Behandlung.

4.1.1 Phänomenologie

Das erste zu lösende Problem stellt die Tatsache dar, dass realistische Modelle von gravitierender Materie immer die Möglichkeit zulassen, dass ein Teilchen ins Unendliche „entkommen“ kann, also offen sind ¹. Man sieht leicht ein, dass so die mikrokanonische Zustandssumme, definiert durch

$$\Omega(E) := \int_{\Lambda} d^{3N}x \int d^{3N}p \Theta(E - H) \quad (4.1.1)$$

divergiert, wenn $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$. Θ ist hier die Heavyside Funktion und E der klassische Erwartungswert der Hamiltonfunktion H . Man muss also eine erste Einschränkung einführen, nämlich das zu untersuchende System durch eine zunächst willkürliche Box Λ mit endlichem Volumen $|\Lambda|$ beschränken. Diese Einschränkung ist trotz des offenen Charakters gravitierender Systeme gerechtfertigt, insofern, als dass man ein sehr großes Volumen wählen kann im Vergleich zur effektiven Reichweite der Wechselwirkung². Dies sei hier vorausgesetzt und wir kommen daher zum eigentlichen Hauptproblem einer statistischen Mechanik gravitierender Systeme und damit einer thermodynamischen Beschreibung. Aufgrund der Langreichweitigkeit der Gravitation ist es unmöglich, das Gesamtsystem in Subsysteme zu unterteilen, die untereinander nur schwach wechselwirken. Das hat zur Folge, dass die Gesamtenergie keine extensive Größe sein kann, d.h., dass die Summe der Energien der Subsysteme nicht gleich der Gesamtenergie ist. Beim idealen Gas z.B., habe jedes der N Teilchen die Energie ϵ , die Gesamtenergie wäre also $E = N \cdot \epsilon$. Wie wir später noch in Kapitel 5.1 sehen werden, verhält sich die Energie eines gravitierenden Systems anders in Abhängigkeit der Teilchenzahl.

Die kanonische Gesamtheit kann hier zwar, wie wir sehen werden, ebenfalls angegeben werden, jedoch führt sie auf ein anderes physikalisches Verhalten des Systems, als im mikrokanonischen Ensemble.

¹Diese Eigenschaft bezieht sich nicht rein auf gravitierende Systeme. Auch Coulombartige sind in diesem Sinne offen und auch hier muß man für die statistische Beschreibung stets eine Box wählen.

²effektive Reichweite bedeutet hier, dass die Teilchen eine mittlere kinetische Energie haben, die ab einer gewissen Entfernung (=effektive Reichweite) über die potentielle Energie dominiert.

Die gerade beschriebenen Probleme lassen sich an dem folgenden sehr einfachen Modell beschreiben:

4.1.2 „Ein statistisches Keplerproblem“

Wenngleich ein Zweikörperproblem ein denkbar schlechtes Modell darstellt, um darauf statistische Physik zu betreiben, zeigt es in diesem Falle doch die besonderen Eigenschaften gravitierender Systeme im thermodynamischen Sinne [21]. Es stellt sich sogar heraus, dass spätere Modelle von Hertel und Thirring sich qualitativ nur wenig von dem folgenden unterscheiden.

Sei nun

$$H(P, p, r) = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\kappa m^2}{r} \quad (4.1.2)$$

die Hamiltonfunktion für das Zweikörpersystem. Hier ist P der Impuls des Massenmittelpunktes, $M = 2m$ die Gesamtmasse, $\mu = m/2$ die reduzierte Masse und r und p die Relativabstände und Impulse. Die Teilchen haben einen festen Radius $a/2$, sodass das Potential bei $r < a$ unendlich wird und außerdem sei das System dadurch beschränkt, dass der Abstand nicht größer als R sein darf. Der Relativabstand r ist also aus dem Intervall (a, R) . Wir werden dieses System sowohl mikrokanonisch, als auch kanonisch betrachten, um die Unterschiede aufzuzeigen. Im mikrokanonischen Ensemble berechnet man zuerst die Zustandssumme $\Omega(E)$, die in diesem Fall nach den Integrationen über die Impulse und eine Schwerpunktkoordinate

$$\Omega(E) = \frac{64\pi^5 m^3 R^3}{9} \int_a^{r_{max}} dr \left(E + \frac{\kappa m^2}{r} \right)^3 r^2 \quad (4.1.3)$$

ergibt. Wir sind hier an dem Phasenraumvolumen $g(E) := \frac{d\Omega(E)}{dE}$ der Hyperfläche mit konstanter Energie, also $H = E$ interessiert.

$$g(E) = \frac{64\pi^5 m^3 R^3}{3} \int_a^{\tilde{r}} r^2 (E + \kappa m^2/r)^2 dr \quad (4.1.4)$$

ist bereits das Ergebnis, wobei der Faktor $(64\pi^5 m^3)/3$ im Weiteren irrelevant ist. Aus der Positivität der Zustandssumme ergibt sich auf natürlichem Wege die obere

Grenze für die Integration in (4.1.3), bzw (4.1.4):

$$\tilde{r} := \begin{cases} \kappa m^2/|E| & \text{wenn } -\kappa m^2/a < E < -\kappa m^2/R \\ R & \text{wenn } -\kappa m^2/R < E < +\infty \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Die Integration führt schnell auf das gewünschte Phasenraumvolumen:

$$\frac{g(E)}{(\kappa m^2)^3} = -R^3(1 + aE/\kappa m^2)^3(3E)^{-1} \quad (4.1.6)$$

für $E \in [-\kappa m^2/a, -\kappa m^2/R]$ und

$$\frac{g(E)}{(\kappa m^2)^3} = -R^3 \left((1 + RE/\kappa m^2)^3 - (1 + aE/\kappa m^2)^3 \right) (3E)^{-1} \quad (4.1.7)$$

für $E \in [-\kappa m^2/R, +\infty)$.

Da das Phasenraumvolumen über $S = \ln g(E)$ mit der Entropie verknüpft ist, lassen sich nun leicht die thermodynamischen Eigenschaften des Systems studieren. Für den Bereich niedriger Energien erhalten wir für die Temperatur folgenden Ausdruck

$$\frac{aT}{\kappa m^2} = \left(\frac{3}{1 + aE/\kappa m^2} - \frac{\kappa m^2}{aE} \right)^{-1}, \quad (4.1.8)$$

der bereits eine wesentliche Eigenschaft gravitierender Systeme aufweist, nämlich ein Gebiet negativer spezifischer Wärme. Im „Hochenergiebereich“ erhalten wir für die Temperatur den erwarteten linearen Anstieg, quantitativ dargestellt durch

$$\frac{aT}{\kappa m^2} = \left(\frac{3 \left[(1 + (aE/\kappa m^2))^2 - (R/a) (1 + (R/a)(aE/\kappa m^2))^2 \right]}{(1 + (aE/\kappa m^2))^3 - (1 + (R/a)(aE/\kappa m^2))^3} - \frac{\kappa m^2}{aE} \right)^{-1}. \quad (4.1.9)$$

In diesem Zweikörpersystem existieren also zwei Energiebereiche, in denen es sich unterschiedlich verhält. Im Bereich $E \leq E_1 = -\kappa m^2/a$ ist der Cut-off des Potentials dominant und das System weist positive spezifische Wärme auf. Diese Größe ist auch im Bereich $E \geq E_2 = -\kappa m^2/R$ positiv, da hier die gravitative Wechselwirkung nicht ausreicht, um $r < R$ zu halten, d.h. das System verhält sich wie ein *Van der Waals*-Gas in einer Box. Lediglich der Bereich $E_1 < E < E_2$ ist durch die Gravitation dominiert und weist zur Gänze ein Gebiet negativer spezifischer Wärme auf. Die Abbildung (4.1) im Anschluß an dieses Kapitel verdeutlicht, wie sich die Temperatur als Funktion der Energie im mikrokanonischen Ensemble verhält.

Wir kommen jetzt zur kanonischen Beschreibung des Systems. Da die spezifische Wärme in diesem Ensemble bekanntlich stets positiv ist, erwartet man sich hier auch ein anderes Bild der physikalischen Eigenschaften. Die kanonische Verteilungsfunktion unseres Zweikörperproblems schreibt sich als

$$Z(\beta) = \int d^3P d^3p d^3Q d^3r e^{-\beta H} . \quad (4.1.10)$$

Nach der Integration über P, Q (= die Koordinate des Massenmittelpunktes) und p bleibt das Integral

$$Z(\beta) = R^3 T^3 \int_a^R dr r^2 e^{(\beta \kappa m^2 / r)} \quad (4.1.11)$$

zu lösen, wobei $\beta \propto 1/T$ die inverse Temperatur darstellt. Das Integral (4.1.11) lässt sich nicht geschlossen lösen, weshalb sich nur Aussagen über das Verhalten von Lösungen bei Extremwerten von r treffen lassen. Der Cut-off bei kleinem r garantiert die Konvergenz von (4.1.11). Ab jetzt werden die Energie und Temperatur folgendermaßen definiert: $\epsilon := aE/\kappa m^2$ und $t := aT/\kappa m^2$. Das Integral nimmt nun die (dimensionslose) Form

$$Z(t) = t^3 (R/a)^3 \int_1^{R/a} x^2 e^{1/(xt)} dx \quad (4.1.12)$$

an. Der Integrand erreicht ein Minimum bei $x = x_{min} = 1/(2t)$. Es treten zwei Fälle auf:

1. $x_{min} < 1$: Das Minimum ist außerhalb der Integrationsgrenzen. Das Integral kann angenähert werden durch

$$Z(t) \approx \left(t \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right)^3 \left(1 + \frac{3a}{2Rt} \right) . \quad (4.1.13)$$

2. $x_{min} > 1$: Die Integration ergibt (über eine Sattelpunktmethode)

$$Z(t) \approx \frac{(R/a)^3 t^4 e^{(1/t)}}{1 - 2t} . \quad (4.1.14)$$

Verringert man nun die Temperatur, bis x_{min} 1 überquert, dann „springt“ $Z(t)$ von Gleichung (4.1.13) auf (4.1.14).

Die Temperatur, bei der dieser Sprung stattfindet, erhält man durch Gleichsetzen von (4.1.13) und (4.1.14). Es folgt daraus für die kritische Temperatur:

$$t_c = (3 \ln(R/a))^{-1} . \quad (4.1.15)$$

Aus der Relation

$$E(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) \quad (4.1.16)$$

erhalten wir also

$$\epsilon(t) =: \epsilon_{<}(t) = 4t - 1 \quad \text{für} \quad t < t_c \quad (4.1.17)$$

und

$$\epsilon(t) =: \epsilon_{>}(t) = 3t - \frac{3a}{2R} \quad \text{für} \quad t > t_c . \quad (4.1.18)$$

Für $t \approx t_c$, also beim Phasenübergang, springt die Energie wie bereits angesprochen und die Energiedifferenz zwischen den Phasen beträgt

$$\Delta\epsilon \approx 1 - (3 \ln(R/a))^{-1} . \quad (4.1.19)$$

Wie man an (4.1.17) bzw. (4.1.18) erkennt, ist die spezifische Wärme stets positiv und nimmt die Werte $c = 4$ bzw. $c = 3$ an. Das Verhalten des Systems im kanonischen Ensemble lässt sich also wie folgt zusammenfassen: Bei Temperatur 0 befindet es sich im Grundzustand mit der Energie $-aE/\kappa m^2$. Steigt nun die Temperatur, steigt damit auch die Energie linear. Erreicht das System seine kritische Temperatur T_c , kommt es zu einem sprunghaften Anstieg der Energie und das System findet sich in einer Hochenergiephase wieder, wo die Energie als Funktion der Temperatur abermals linear ansteigt.

Dieses Modell lässt sich schnell auf N untereinander *nicht* wechselwirkende Zweikörpersysteme erweitern. Die Zustandssumme ist dann einfach mit der entsprechenden Potenz zu versehen: $Z_N(\beta) = Z^N(\beta)$.

Die folgenden Abbildungen zeigen den schematischen Verlauf der Funktion $t(\epsilon)$

in beiden Ensembles³. Man sieht, dass die kanonische und mikrokanonische Beschreibung abseits des Phasenüberganges sehr gut übereinstimmen. (Abweichungen ergeben sich hier durch die statistische Behandlung eines Zweikörpersystems)

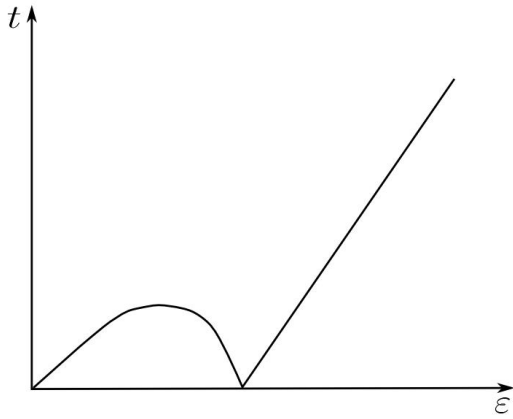


Abbildung 4.1: Mikrokanonisch: Es kommt zur deutlichen Ausbildung eines Gebietes mit negativer spezifischer Wärme.

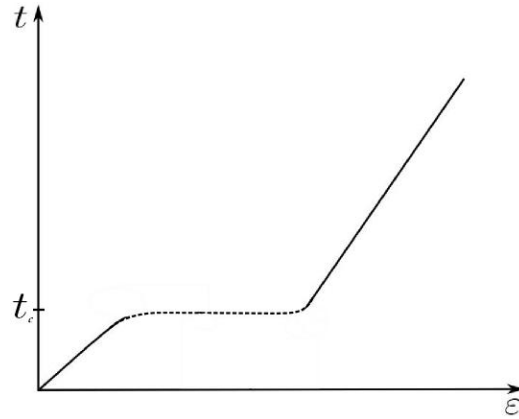


Abbildung 4.2: Kanonisch: Das Gebiet negativer spezifischer Wärme wird bei hier t_c durch einen *Phasenübergang* überbrückt.

³Die Abbildungen sind nur als qualitativer Verlauf der mikrokanonischen und kanonischen Funktionen zu verstehen. Genauere Darstellungen sind sowohl bei Padmanabhan in [21], als auch bei Thirring in [7]

4.2 Einfache Viel Teilchen Modelle

Wir wenden uns jetzt den klassischen Modellen Thirring's zu, der sich von Beginn an mit echten Vielteilchenproblemen auseinandersetzte.

Die Methode, die Thirring verfolgte, war eine schrittweise Verbesserung des gleich folgenden Modells für Coulomb–Wechselwirkung. (Für Details der Rechnungen in den folgenden Modellen, siehe [7])

4.2.1 Normale Materie

Wir beginnen mit einer simplen Hamiltonfunktion für normale, d.h. nichtgravitierende Materie, also $H = K + V$ mit

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad \text{und} \quad V = \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}} \quad (4.2.1)$$

$\langle \cdot \rangle$ bezeichnet den thermischen Erwartungswert im kanonischen Ensemble, also für eine Observable A gilt $\langle A \rangle := \frac{\int A e^{\beta E}}{\int e^{\beta E}}$, wobei E den Erwartungswert der Hamiltonfunktion darstellt. Dann führen eine naive Verwendung des klassischen Gleichverteilungssatzes und des Virialtheorems sofort auf

$$\langle -K \rangle = \frac{1}{2} \langle V \rangle = \langle H \rangle \equiv E = -\frac{3NT}{2} \quad . \quad (4.2.2)$$

Für die spezifische Wärme erhält man so

$$c = \frac{dE}{dT} = -\frac{3N}{2} < 0 \quad . \quad (4.2.3)$$

Dieses „Modell“ ist jedoch viel zu einfach formuliert. Wie bereits im vorigen Abschnitt angesprochen, divergiert die Zustandssumme (4.1.1) für $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$. Somit muss dieses Modell verfeinert werden. Thirring geht im nächsten Schritt über zu einem attraktiven $1/r$ –Potential:

4.2.2 Gravitierende Materie in endlichem Volumen

Das obige Modell wird jetzt insofern verfeinert, als dass $\Omega(E)$ für die Ersetzung $e_i e_j \rightarrow -\kappa m^2$ abgeschätzt wird und das Gesamtvolumen $|\Lambda|$ der sphärischen Box in $M \ll N$ Zellen gleicher Größe aufgeteilt wird. Die Idee ist hier, dass der Hauptteil des Gravitationspotentials, welches ein Teilchen spürt, nicht von den nächsten Nachbarn, sondern vom Großteil der weit entfernten Teilchen stammt. Es sei weiters eine Dichte für die Zelle α definiert durch $\rho(x_\alpha) = n_\alpha(M/|\Lambda|)$ mit n_α als Teilchenzahl in der Zelle α . Für die Gesamtteilchenzahl ergibt sich also $N = \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha$ und im Kontinuumslimites $= \int d^3x \rho(x)$. Diese Modellannahmen führen mit weiteren Zusatzannahmen über die mikrokanonische Zustandssumme (s. Originalarbeit) auf die Gleichung für ein statisches Gleichgewicht für Sterne, die aus einem isothermen Gas bestehen (Details zu dieser Gleichung finden sich u.a. in [34], S. 280ff):

$$T \frac{d\rho}{dr} = -\frac{4\pi\kappa}{r^2} \rho(r) \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad , \quad (4.2.4)$$

Es sei $T_0 := (1/2)N\kappa$ und Lösungen ρ von Gleichung (4.2.4) sind, wie man sich leicht überlegen kann, proportional zu $1/r^2$. Diese Lösungen mitsamt der Definition einer kritischen Temperatur T_0 führen bei Thirring schlußendlich auf die Energie

$$E = -\frac{N^2\kappa}{4} - \frac{7}{2}N(T - T_0) \quad (4.2.5)$$

und die Entropie

$$S = N \left[\frac{3}{2} \ln \frac{N\pi\kappa}{2} - \ln \frac{N}{4\pi} + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \frac{T - T_0}{T} \right], \quad (4.2.6)$$

woraus sich für die spezifische Wärme bei $T = T_0$ folgender Wert ergibt:

$$c|_{T=T_0} = -\frac{7N}{2} \quad (4.2.7)$$

Man sieht, dass mit den hier gemachten Modellannahmen die spezifische Wärme kleiner ist, als im ersten Modell. Dieses kann aber ebenfalls nicht exakt sein, da kein Cut-off des Potentials verwendet wurde, ohne den die Entropie S nicht existiert.

4.2.3 Künstlicher Stern

Thirring geht über zu einem Potential, dass die Extensivität der Energie verhindert und betrachtet das System mikrokanonisch. Eine Bedingung, die für die mikrokanonische Entropie $S(E)$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} < 0 \quad , \quad d.h. \quad c = - \left(T^2 \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \right)^{-1} > 0 \quad , \quad (4.2.8)$$

garantiert, ist, dass die Gesamtenergie E als Funktion der Teilchenzahl N proportional zur Teilchenzahl selbst ist, also $E \propto N$. Im Falle gravitierender Systeme ist diese Proportionalität nicht gegeben, weshalb dieses Verhalten verantwortlich für die Negativität der spezifischen Wärme sein muß. Thirring entwirft auf dieser Grundlage das folgende Sternmodell: Innerhalb eines Wechselwirkungsvolumen Λ interagiert jedes Teilchen attraktiv mit anderen Teilchen des Volumens Λ und außerhalb Λ sind die Teilchen frei. Ein Paarpotential, das die Modellannahmen erfüllt ist dann

$$v(x_i x_j) = -2\nu \chi_{|\Lambda|}(x_i) \chi_{|\Lambda|}(x_j) \quad , \quad (4.2.9)$$

mit

$$\chi_{|\Lambda|}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in |\Lambda| \\ 0 & \text{für } x \notin |\Lambda| \end{cases} \quad (4.2.10)$$

wobei ν die Stärke der Wechselwirkung angibt. Dies führt auf eine potentielle Gesamtenergie von

$$V = -\nu N_0^2, \quad (4.2.11)$$

wobei N_0 die Zahl der Teilchen innerhalb $|\Lambda|$ ist.

Die mikrokanonische Zustandssumme als Funktion der Energie schreibt sich nun mit der Heavyside Funktion θ als

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{1}{N!} \int d^{3N} p \int d^{3N} x \theta \left(E - \sum_i p_i^2 - \sum_{i>j} V(x_i, x_j) \right) = \\ &= \frac{|\Lambda|^N \pi^{3N/2}}{(3N/2)!} \sum_{N_0=2}^N \frac{(E + N_0^2 \nu)^{3N/2} e^{F(N-N_0)}}{N_0! (N - N_0)!} = \sum_{N_0=2}^N e^{S(E, N, N_0)} \quad , \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

wobei N_{min} die Mindestanzahl von Teilchen innerhalb $|\Lambda|$ ist. Das Volumen außerhalb Λ sei $|\Lambda|e^{|\bar{\Lambda}|}$. Die Bedingung für ein Maximum der Entropie ist dann

$$\frac{\partial S(E, N, N_0)}{\partial N_0} = \frac{3NN_0\nu}{E + N_0^2\nu} - \ln \frac{N_0}{N - N_0} - |\bar{\Lambda}| = 0 \quad . \quad (4.2.13)$$

Gleichung (4.2.13) ist eine Gleichgewichtsbedingung zwischen einem idealen Gas und einem System mit der zusätzlichen Energie $-\nu N^2$. Um diese Gleichgewichtsbedingung zu untersuchen, führt Thirring „intensive“ Größen α, ϵ und ϑ ein, die sich wie folgt skalieren:

$$E = N^2\nu(\epsilon - 1) \quad , \quad T = \frac{2}{3}N\nu\vartheta \quad , \quad N_0 = N(1 - \alpha) \quad (4.2.14)$$

Mit der Gleichung für die Zustandssumme (4.2.12) gewinnt man eine Parameterdarstellung für $\vartheta(\epsilon)$:

$$\vartheta = \epsilon - 2\alpha + \alpha^2 > 0 \quad , \quad \epsilon = 2\alpha - \alpha^2 + \frac{3(1 - \alpha)}{F + \ln(1 - \alpha)/\alpha} \quad . \quad (4.2.15)$$

Man erkennt, dass für große F , also eine Atmosphäre viel größer als der Stern, für ϑ sowie dessen Ableitung

$$\vartheta = \frac{3}{F}(1 - \alpha) \quad , \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \epsilon} = -\frac{3}{F} < 0 \quad (4.2.16)$$

gilt, die spezifische Wärme also negativ ist.

Andererseits gilt im Bereich minimaler Energie, also $\epsilon \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow 0$:

$$\vartheta = \epsilon - 2e^{-\frac{3}{\epsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \epsilon} \rightarrow 1 \quad , \quad (4.2.17)$$

was auch erwartet werden kann, da sich in diesem Limes alle Teilche innerhalb Λ aufhalten und damit die Wechselwirkung konstant ist.

Qualitativ verhalten sich die Konstituenten in diesem Modell folgendermaßen: für große E sind die meisten Teilchen außerhalb Λ und das System verhält sich normal. Fällt E , so kühlt sich das System zunächst ab, jedoch stürzen ab einer bestimmten Temperatur so viele Teilchen in Λ , dass T springt und mit weiter sinkender Energie steigt. Dies bleibt solange der Fall, bis die meisten Teilchen in Λ sind und die spezifische Wärme wieder positiv wird.

Wir betrachten jetzt ein System mit negativer spezifischer Wärme mit Volumen Λ_1 in thermischen Kontakt mit einem idealen Gas mit Volumen Λ_2 . Minimiert man die Summe der Entropien eines solchen Systems und eines normalen idealen Gases, so erhält man für die zugehörigen intensiven Größen

$$E = \nu N^\gamma (\epsilon - 1) \quad , \quad N_2 = \alpha N \quad , \quad \vartheta = \frac{3T}{2\nu N^{\gamma-1}} \quad , \quad |\bar{\Lambda}| = \ln \frac{|\Lambda_1|}{|\Lambda_2|} \quad (4.2.18)$$

die Relation

$$\vartheta = \epsilon - 1 + (1 - \alpha)^\gamma \quad , \quad (4.2.19)$$

wobei $\gamma \in \mathbb{Z}^+$. Das heißt, dass Systeme, deren Energie E mehr als linear mit der Teilchenzahl N steigt, bei Teilchenaustausch mit normalen Systemen ein Gebiet negativer spezifischer Wärme aufweist. Das Besondere an diesem Modell ist die Tatsache, dass niemals ein Newtonsches Gravitationspotential verwendet wurde, d.h. dass hier nicht speziell gravitierende Materie gemeint ist. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Systeme, deren Teilchen untereinander mit einem Potential wechselwirken, das die Extensivität der Gesamtenergie verhindert, zu diesen Ergebnissen.

Im Folgenden wird untersucht, wie sich diese Systeme in thermischem Kontakt mit anderen Systemen mit zunächst beliebiger spezifischer Wärme verhalten.

4.3 Systeme mit negativer Wärmekapazität im thermischen Kontakt

Wir betrachten zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 mit Temperaturen T_1 und T_2 und spezifischer Wärme c_1 und c_2 , die in thermischen Kontakt gebracht werden.⁴

Für $T_1 \neq T_2$ erhält man einen Entropiezuwachs durch Energietransfer vom heißeren zum kälteren System. Für $T_1 = T_2$ existiert eine stabile Situation genau

⁴Es gibt auch Systeme, wo $T < 0$ sinnvoll ist. Dies sind solche, wo es eine obere Schranke für die Energie gibt, wie z.B. Spinsysteme im Magnetfeld. Die hier gemachten Aussagen betreffen jedoch nur solche Systeme, bei denen $T \geq 0$ ist.

dann, wenn $1/c_1 + 1/c_2 > 0$. Dies folgt aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2},$$

also $T_1 = T_2$.

Wenn also die Wärmekapazität c_V in beiden Systemen negativ ist, kann sich kein stabiles Gleichgewicht einstellen und wenn $c_2 > 0$, nur dann, wenn $|c_1| > c_2$. Wenn beide $c_i < 0$ und ein System geringfügig heißer ist, wird es Energie zum anderen übertragen und dabei immer heißer werden und immer mehr Energie übertragen. Dadurch entfernt man sich immer weiter von $T_1 = T_2$ und ein Gleichgewicht kann sich nur einstellen, wenn ein c_i wieder positiv wird. Für $c_2 > -c_1 > 0$ und beispielsweise $T_1 > T_2$ wird Energie von Σ_1 nach Σ_2 übertragen und beide Temperaturen fallen. T_1 sinkt in diesem Fall aber schneller als T_2 , da $|c_1| < c_2$. In diesem Fall kann sich wieder kein Gleichgewicht einstellen. Nur für $|c_1| > c_2$ wird sich T_2 schneller ändern als T_1 und nur so kann auch ein Gleichgewicht erreicht werden. Im kanonischen Ensemble wäre das System Σ_2 das Wärmebad und somit $c_2 > |c_1|$. Also würde sich auch hier niemals ein Gleichgewicht einstellen, solange $c_1 < 0$ und die Systeme würden Energie austauschen bis sich die Energie von Σ_1 so eingependelt hat, dass $c_1 > 0$. Wie wir bereits in Kapitel 4.1.2 gesehen haben, wird in der kanonischen Beschreibung die Region mit $c < 0$ durch einen Sprung überbrückt (siehe Abbildung 4.2). Das heißt, dass bei gegebener Temperatur T von Σ_2 das System von der untersten Energie, wo $T_1 = T$ zur höchsten Energie, wo $T_1 = T$ springt.

4.4 Die beschränkte Aussagekraft der klassischen Modelle gravitierender Systeme

Die oben beschriebenen klassischen Modelle von Padmanabhan [21], Thirring [7] und Hertel und Thirring [9] sind in ihrer Aussagekraft maßgeblich durch zwei Umstände beschränkt:

- Systeme bei denen die gravitative Wechselwirkung dominiert sind entweder Sterne oder noch größere Strukturen. Bleiben wir bei Sternen, so sind diese

wesentlich komplizierter aufgebaut als es die Modelle annehmen. Ein Stern besteht aus Schichten mit jeweils unterschiedlicher chemischer Zusammensetzung („Zwiebelschalenstruktur“). Alle hier besprochenen Modelle gehen aber von N identischen Teilchen aus. Ab einer gewissen Gesamtmasse und Dichte sind sowohl speziell als allgemein relativistische Effekte zu berücksichtigen. Betrachtet man größere Strukturen, wie Galaxien, so ist ein bloßer Cut-off des Potentials im Ursprung nicht gerechtfertigt, da Sterne keine harten Kugeln sind.

- Der Quantencharakter der Materie spielt eine nicht zu vernachlässigende Rolle bei der Behandlung gravitierender Systeme. Dieser äußert sich durch grundlegende Prinzipien, wie das Pauli-Verbot und die Unschärferelation. Diese Prinzipien wurden bei den oben behandelten Modellen vollständig ausgeklammert.

Im folgenden Abschnitt werden zum einen Rücksicht auf den Quantencharakter genommen und zum anderen rigorose Beweise für die Existenz eines Gravitationsphasenübergangs behandelt.

Am speziellen thermodynamischen Verhalten der Systeme ändert sich bei den quantenmechanischen Modellen qualitativ gegenüber den klassischen Modellen nichts, d.h. die quantenmechanischen Modelle weisen ebenfalls ein Gebiet negativer spezifischer Wärme c_V im mikrokanonischen Ensemble, sowie einen Phasenübergang im kanonischen Ensemble auf.

Kapitel 5

Quantenmechanische Modelle

Wie im vorigen Kapitel werden auch hier sowohl die Teilchengeschwindigkeiten als auch die Gravitation selbst nichtrelativistisch behandelt. Wir betrachten „rein kosmische“ Materie, d.h. Systeme, deren Gravitationsenergie über die Coulombwechselwirkung dominiert. Wenn wir annehmen, dass jedes Teilchen nur mit seinem nächsten Nachbarn im Abstand $r = R/N^{1/3}$ über Coulomb wechselwirkt, dann ist die potentielle Energie der Coulombwechselwirkung $V_C = -\frac{e^2 N^{4/3}}{R}$. Die potentielle Energie der Newtonwechselwirkung ist gegeben durch $V_N = -\frac{\kappa M^2 N^2}{2R}$. Ein Vergleich der beiden Energien liefert einen kritischen Wert für die Teilchenzahl $N_c = (2e^2/\kappa M^2)^{3/2} \approx 10^{54}$ bei dem die beiden Energien gleich werden. Wir werden im Folgenden Teilchenzahlen in der Größenordnung $N \approx 10^{57}$ betrachten, da dann die Coulombwechselwirkung vernachlässigbar gegenüber der Newtonschen Wechselwirkung ist. [1]

5.1 Die Grundzustandsenergie gravitierender Fermionen

Wir beginnen den quantenmechanischen Teil mit der Untersuchung des Verhaltens der Grundzustandsenergie gravitierender Fermionen, die auf J.M. Levy-Leblond

[35] zurück geht.

5.2 Die Energie als Funktion der Teilchenzahl

Es folgt eine eher heuristische Herleitung des Verhaltens der Grundzustandsenergie eines Systems aus gravitierenden Fermionen:

Man betrachtet N Teilchen der Masse m mit mittlerem Impuls p und mittleren Abstand r . Dann lautet die Gesamtenergie des Systems in Abhängigkeit der Teilchenanzahl

$$E(N) = N \frac{p^2}{2m} - N^2 \frac{Gm^2}{2r} \quad . \quad (5.2.1)$$

Die Unschärferelation verlangt nun für den mittleren Abstand eine untere Schranke $r \geq \hbar/p$, sodass sich

$$E(N) \geq N \frac{p^2}{2m} - N^2 \frac{Gm^2 p}{\hbar} \quad (5.2.2)$$

ergibt. Minimiert man diese Energie bezüglich des einzigen freien Parameters p , ergibt sich zunächst eine Grundzustandsenergie von

$$E_0(N) \propto \frac{N^3 G^2 m^5}{8\hbar^2} - \frac{N^3 G^2 m^5}{4\hbar^2} = -\frac{N^3 G^2 m^5}{8\hbar^2} \quad . \quad (5.2.3)$$

Führt man jetzt noch den Umstand ein, dass man Fermionen betrachtet, sowie die Überlegung, dass N Teilchen ein Volumen von $N(\hbar/p)^3$ einnehmen, dann ergibt sich die mittlere Separation eines Teilchenpaares zu $N^{1/3}\hbar/p$. D.h. die fermionische Gesamtenergie ist somit

$$E^F(N) \geq \frac{Np^2}{2m} - N^{5/3}p \frac{Gm^2}{2\hbar} \quad . \quad (5.2.4)$$

Eine abermalige Minimierung nach p ergibt $p_0 = (Gm^3 N^{2/3})/(2\hbar)$ und somit eine fermionische Grundzustandsenergie gravitierender Systeme:

$$E_0^F(N) \propto \frac{N^{7/3} G^2 m^5}{8\hbar^2} - \frac{N^{7/3} G^2 m^5}{4\hbar^2} = -\frac{N^{7/3} G^2 m^5}{8\hbar^2} \quad . \quad (5.2.5)$$

Dieses Potenzverhalten gravitierender Materie kann auch direkt aus der Thomas–Fermi Theorie abgeleitet werden und wie man noch im Laufe dieser Arbeit sehen wird, spielt das Verhalten der Energie als Funktion der Teilchenzahl eine entscheidende Rolle bei der Frage nach der Stabilität von solchen Systemen.

5.3 Schranken für die Grundzustandsenergie

Als nächstes beschäftigt sich Levy–Leblond in [35] mit unteren und oberen Schranken der Grundzustandsenergie. Die folgenden vier Punkte stellen je eine Verfeinerung der Modellannahmen des jeweils vorhergehenden dar und werden in [35] bewiesen.

1. Die Grundzustandsenergie eines Systems aus N gravitierenden Teilchen der Masse m ist beschränkt durch

$$-AN(N-1)^2 \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \leq E_0(N) \leq -BN(N-1)^2 \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \quad (5.3.1)$$

mit $A, B = \text{const} > 0$.

2. Die Grundzustandsenergie eines Systems aus N identischen gravitierenden Fermionen der Masse m ist beschränkt durch

$$-A'N(N-1)^{4/3} \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \leq E_0^F(N) \leq -B'N^{1/3}(N-1)^2 \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \quad (5.3.2)$$

mit $A', B' = \text{const} > 0$.

3. Die Grundzustandsenergie eines Systems aus N unterschiedlichen Teilchen mit maximaler Masse m , die q Sorten angehören und jeweils einem Ausschließungsprinzip gehorchen ist beschränkt durch

$$-Aq^{2/3}N^{7/3} \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \leq E_0^{(q)}(N) \leq -BN^{7/3} \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \quad (5.3.3)$$

4. Die Grundzustandsenergie eines Systems aus N identischen Fermionen der Masse m und Ladung $(-e)$ und N Teilchen der Masse M , Ladung e und nicht festgelegter Quantenstatistik ist beschränkt durch

$$-CN \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(1 + cN^{2/3} \frac{GM^2}{e^2}\right)^2 \leq E_0(N) \leq -DN \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(1 + dN^{2/3} \frac{GM^2}{e^2}\right)^2 \quad (5.3.4)$$

mit $c, C, d, D = \text{const} > 0$.

5.4 Thermodynamische Instabilität

Wir studieren jetzt die Stabilität eines Systems, bestehend aus untereinander gravitativ wechselwirkenden Fermionen, wie es bei Hertel und Thirring in [8] gemacht wurde. Es soll zu Beginn gezeigt werden, dass das Gleichgewicht zwischen Gravitation und fermionischen Druck thermodynamisch instabil ist und dass die Gesamtenergie eines solchen Systems als Funktion der Temperatur eine Unstetigkeitsstelle aufweist.

5.4.1 Heuristik

Wir betrachten ein System aus N Neutronen in einem sphärischen Volumen $|\Lambda| = \frac{4}{3}R^3\pi$. Die potentielle und die kinetische Energie sind gegeben durch

$$V = -\frac{3N^2}{5R} \quad , \quad (5.4.1)$$

sowie

$$K = \frac{|\Lambda|}{8\pi^3} \int \frac{p^2 d^3p}{1 + e^{\beta p^2/2 + \alpha}} \quad . \quad (5.4.2)$$

Das chemische Potential α ist eindeutig bestimmt durch

$$N = \frac{|\Lambda|}{4\pi^3} \int \frac{d^3p}{1 + e^{\beta p^2/2 + \alpha}} \quad . \quad (5.4.3)$$

Der Zusammenhang zwischen potentieller und kinetischer Energie und dem thermodynamischen Druck $P = -\frac{\partial}{\partial|\Lambda|}F(N, \beta, |\Lambda|)$ folgt aus dem Virialtheorem und der TF Theorie. Es ergibt sich

$$3P|\Lambda| = 2K + V = \frac{R^3}{4\pi^3} \int \frac{p^2 d^3p}{1 + e^{\beta p^2/2 + \alpha}} - \frac{3N^2}{5R} \quad . \quad (5.4.4)$$

Man erkennt, dass für Temperaturen unterhalb eines kritischen Wertes und Radien aus einem „kritischen“ Intervall (R_1, R_2) ein negativer Druck resultiert. Wählt man also einen sehr großen Radius, findet man eine homogene Massenverteilung. Komprimiert man allerdings das System bei fester Temperatur, entsteht ein sehr

reicher Kern mit homogener Massenverteilung und ein Mantel mit geringer Mas- sendichte. Die numerischen Rechnungen von Hertel und Thirring in [8] ergeben, dass der Übergang von großen zu kleinen Radien unstetig ist.

5.4.2 Die temperaturabhängige Thomas–Fermi Gleichung

Ausgehend von einem Hamiltonoperator

$$H(N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\Delta_i^2 - \sum_{j=1, j \neq i}^N |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-1} \right) \quad (5.4.5)$$

und einer freien Energie F , definiert durch

$$e^{-\beta F(N, \beta, |\Lambda|)} = \text{Tr}_{\mathcal{H}(N, \Lambda)} e^{-\beta H(N)} \quad , \quad (5.4.6)$$

wobei $\mathcal{H}(N, \Lambda)$ der Hilbertraum der antisymmetrischen, quadratintegrablen, komplexen Wellenfunktionen Ψ im Volumen $|\Lambda| = 4\pi R^3/3$ ist, gehen Hertel und Thirring über zur TF Theorie und suchen stationäre Punkte der freien Energie bezüglich der potentiellen Energie V , welche durch die Massenverteilung ρ_V generiert wird:

$$V(r) = - \int_{|\vec{r}'| \leq R} d^3 r' \frac{\rho_V(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.4.7)$$

Die freie Energie skaliert sich folgendermaßen:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\frac{7}{3}} F(\lambda N, \lambda^{-\frac{4}{3}} \beta, \lambda^{-1} |\Lambda|) =: F_V(N, \beta, |\Lambda|) \quad , \quad (5.4.8)$$

wie Hertel und Thirring im Appendix von [8] zeigen. Sie finden, dass

$$\begin{aligned} V &\rightarrow F_V(N, \beta, |\Lambda|) = \\ &= -\frac{N\alpha_V}{\beta} - 2\pi \int_0^R dr r^2 \rho_V(r) V(r) - \frac{8}{\sqrt{2}\beta\pi} \int_0^R dr r^2 \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon + V(r)) - \alpha_V}) \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

für ein Potential stationär wird, das

$$V(r) = \int_0^R dr' 4\pi r'^2 \left(\frac{\Theta(r' - r)}{r'} + \frac{\Theta(r - r')}{r} \right) \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\epsilon \sqrt{\epsilon}}{1 + e^{\beta(\epsilon + V(r')) + \alpha_V}} \quad (5.4.10)$$

erfüllt, wobei α eindeutig bestimmt ist durch

$$N = \int_0^R dr 4r^2 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\epsilon \sqrt{\epsilon}}{1 + e^{\beta(\epsilon + V(r)) + \alpha_V}} \quad . \quad (5.4.11)$$

Das Potential $V(r)$ wird also erzeugt durch eine Fermiverteilung, wo die Energie die Summe aus kinetischer Energie ϵ und potentieller Energie $V(r)$ ist. Dadurch kann man mit der Bedingung (5.4.11) für α_V , $V(r)$ und $\rho(r)$ selbstkonsistent bestimmen. Gleichung (5.4.10) ist also bereits eine Formulierung der temperaturabhängige Thomas–Fermi Gleichung. Findet man hier mehr als eine Lösung für gegebene N, β und V , ist dies bereits Anlass einen Phasenübergang zu vermuten. Dies wird dann im letzten Abschnitt dieses Kapitels besprochen. Ein analoges Ergebnis erhalten Hertel und Thirring in [10], indem sie übergehen zu einem nicht-singulären Potential, das chemische Potential entsprechend reskalieren und dann die freie Energie im TF Limes berechnen. In [11] beziehen Narnhofer, Hertel und Thirring auch elektrostatische Wechselwirkungen mit ein.

Zurück zur Stabilität [36]: In einem gewöhnlichen endlichen System (d.h. nicht gravitierend, endliches Volumen, endliche Teilchenanzahl) schreibt sich die Gesamtenergie in der mikrokanonischen Gesamtheit als

$$E(N, S, |\Lambda|) = \inf \text{Tr}_{\mathcal{H}_S} H(N, |\Lambda|) \quad (5.4.12)$$

und im thermodynamischen Limes gilt für normale Materie (=n.M)

$$\epsilon_{\text{n.M}}(N, S, |\Lambda|) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-1} H(\lambda N, \lambda S, \lambda |\Lambda|) \quad . \quad (5.4.13)$$

Wie wir bereits gesehen haben, muß die Energie im gravitierenden Fall (=g.M) entsprechend dem Skalierungsverhalten der freien Energie geschrieben werden als

$$\epsilon_{\text{g.M}}(N, S, |\Lambda|) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-7/3} H(\lambda N, \lambda S, \lambda^{-1} |\Lambda|) \quad . \quad (5.4.14)$$

Identifiziert man jetzt die Energiefunktion $\epsilon(N, S, V)$ mit der Funktion $f(x)$ aus Kapitel 3.5, so ist sofort klar, dass Homogenität erster Ordnung zwar im Fall gewöhnlicher Materie gewährleistet ist, aber keinesfalls bei gravitierender Materie. Dort ist die Homogenität von der Ordnung $7/3$, also $f(\lambda x) = \lambda^{7/3} f(x)$. Aus Theorem 3.5 folgt, dass bei Verletzung einer der drei Eigenschaften zumindest eine weitere verletzt wird. Es lässt sich zeigen, dass dies bei attraktiver langreichweitiger Wechselwirkung der dritte Punkt, also die Konvexität sein muß, da hier die gleichzeitige Gültigkeit von Homogenität und Subadditivität zu unphysikalischen Ergebnissen, wie die Möglichkeit eines Gleichgewichtszustandes zweier Systeme mit negativer spezifischer Wärme, führen würde (siehe [19]). Die Stabilität eines thermodynamischen Systems setzt jedoch Konvexität der Energie voraus, weswegen Systeme, die dies nicht erfüllen auch nicht stabil gegenüber Implosionen sein können.

5.4.3 Lösungen der temperaturabhängigen TF Gleichung

Hertel und Thirring lösen in [8] die temperaturabhängige Thomas–Fermi Gleichung (5.4.10) numerisch, indem sie das Potential folgendermaßen redefinieren

$$\zeta^{-1}W(\zeta) := \beta V(\beta^{1/4}\zeta) + \alpha_V \quad (5.4.15)$$

und damit auf eine zur ursprünglichen TF Gleichung (5.4.10) äquivalente Gleichung

$$W''(\zeta) = \frac{\sqrt{32}}{\pi} \zeta \int_0^\infty \frac{d\eta \sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + W(\zeta)/\zeta}} \quad (5.4.16)$$

kommen, wobei η die Energie und

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta^{-1}W(\zeta) < \infty \quad (5.4.17)$$

eine Anfangsbedingung ist. In weiterer Folge findet man für das redefinierte Potential die Schranken

$$W'(0)\zeta \leq W(\zeta) \leq W'(0)\zeta + \frac{c}{6}\zeta^3 \quad (5.4.18)$$

mit $c = \text{const.}$

Die Autoren berechnen weiters, dass für $RN^{1/3} \geq 12.8 \frac{\hbar^2}{\kappa m^3}$ die inverse Temperatur β keine monotone Funktion von $W'(0)$ ist. Zu einem bestimmten, festen $(N, \beta, |\Lambda|)$ gehören dann drei verschiedene Werte $W'(0)$ und daher drei verschiedenen Massenverteilungen. Es kann nur das Potential $V(r)$ auf ein thermodynamisches Gleichgewicht führen, für das die zugehörige freie Energie $F_V(N, \beta, |\Lambda|)$ minimal bezüglich dieses Potentials ist. Jedoch ergibt sich aus den Lösungen ein Sprung der Gesamtenergie genau bei der Temperatur, bei der zwei der Lösungen zum selben Minimum von F_V führen. Das ist genau der in der Einleitung dieses Kapitels angedeutete Phasenübergang.

Trägt man außerdem die Entropie, definiert durch

$$S = \beta(E - F) \quad , \quad (5.4.19)$$

gegen die Energie auf, wobei man darauf zu achten hat, dass $RN^{1/3}$ den kritischen Wert $12.8 \frac{\hbar^2}{\kappa m^3}$ klar überschreitet, so findet man ein Gebiet, in dem die Entropie ein konvexes Krümmungsverhalten aufweist. Dies entspricht dem bereits klassisch gefundenen Gebiet negativer spezifischer Wärme $c_V < 0$ in Kapitel 4, sowie in [7, 9, 21].

5.4.4 Thermodynamischer und hydrostatischer Druck

Ein weiteres Ergebnis, abgeleitet aus den Definitionen der Einleitung dieses Kapitels finden Hertel und Thirring, indem sie die Drücke betrachten. Mit der Definition des thermodynamischen Drucks unseres Systems

$$P = -\frac{\partial}{\partial |\Lambda|} F_U(N, \beta, |\Lambda|) \quad (5.4.20)$$

und der Gleichung für hydrostatisches Gleichgewicht

$$\frac{2}{3} \frac{d\epsilon_k(r)}{dr} = -\frac{\rho(r)M(r)}{r^2} \quad , \quad (5.4.21)$$

wobei $\epsilon_k(r)$ die kinetische Energiedichte, definiert durch

$$\epsilon_k(r) := 2 \int_0^\infty \frac{d\epsilon \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2\pi^2}} \frac{\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon + V(r)) + \alpha_V}} \quad (5.4.22)$$

ist und $M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r')$ die Masse innerhalb einer Kugel mit Radius r , erhält man über das Virialtheorem und einer Integration von (5.4.21),

$$\frac{4\pi}{3} \int_0^R dr r^3 \frac{d}{dr} \frac{2\epsilon_k(r)}{3} = |\Lambda| (2\epsilon_k(R))/3 - (2K)/3 = V/3 \quad (5.4.23)$$

durch einen Vergleich mit Gleichung (5.4.4) das Ergebnis

$$P = \frac{2}{3} \epsilon_k(R) \quad (5.4.24)$$

Das bedeutet, dass der thermodynamische Druck des Systems gleich dem hydrostatischen Druck an der Oberfläche ist¹. Messer beschäftigt sich in [13] ausführlich mit dem den großkanonischen Druck. Hier kann er über den thermodynamischen Limes des Drucks zeigen, dass die temperaturabhängige TF Gleichung (siehe Grundlagen) bezüglich der Dichte für ein System in einer kubischen Box $|\Lambda_l|$ mit Seitenlänge l

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{1 + e^{\beta(p^2/2m + W(\vec{x}) - \mu)}} \quad (5.4.25)$$

$$N = \int_{\Lambda_l} d^3 x \rho(\vec{x}) \quad (5.4.26)$$

$$V(\vec{x}) = - \int d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}') \kappa m^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (5.4.27)$$

im thermodynamischen TF-Limes exakt ist bei gegebenen $\beta > 0$ und $l > 0$.

5.5 Phasenübergänge in der Thomas–Fermi Theorie

In Kapitel 5.4.3 wurde bereits aufgrund der numerischen Lösungen der TF Gleichungen geschlossen, dass es bei gravitierenden Fermionen zu einem Phasenübergang im kanonischen Ensemble kommen muß. Das erste analytische Resultat findet A. Pflug in [14], wo er sich mit „gravitierenden Fermionen in einem unendlichen

¹Mit hydrostatischem Druck ist hier der fermionische Druck gemeint, der aus der TF Theorie folgt

Konfigurationsraum“ beschäftigt. Die Ergebnisse Pflugs benötigen einige einleitende Definitionen, die wir jetzt angeben werden. Im Anschluß an Pflugs Theorem liefern wir einen rigorosen Beweis, dass es in einem System gravitierender Fermionen zu einem Phasenübergang im kanonischen Ensemble kommen muß.

5.5.1 Pflugs Theorem

Pflug ersetzt den Hamiltonoperator

$$H_{N,|\Lambda|} = \frac{1}{2^{2/3}\pi^{4/3}} \sum_{i=1}^N (-\vec{\nabla}_i^2) - \frac{1}{4\pi} \sum_{i<j} \frac{1}{|x_i - x_j|} \quad (5.5.1)$$

mit $h = (4\pi)^{1/3}$, $m = 1/2$ und $\kappa = 1/\pi$ durch

$$H'_{N,|\Lambda|} = N^{-4/3} U^\dagger H_{N,|\Lambda|_N} U = \frac{1}{(2N)^{2/3}\pi^{4/3}} \sum_{i=1}^N (-\vec{\nabla}_i^2) - \frac{1}{4N\pi} \sum_{i<j} \frac{1}{|x_i - x_j|} \quad , \quad (5.5.2)$$

d.h. es wurde eine Längenskala, abhängig von N gewählt. $|\Lambda|_N$ ist die „Kontraktion“ der beschränkten, offenen Region $|\Lambda| \subseteq \mathbb{R}^3$ durch einen Faktor $N^{-1/3}$. Sei nun $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ und sei $(\Omega_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Menge natürlicher Zahlen mit $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \ln \Omega_N = s$, dann existiert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-7/3} E(N, \Omega_N, |\Lambda|_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} E'(N, \Omega_N, |\Lambda|) := \epsilon(s, |\Lambda|) \quad , \quad (5.5.3)$$

wie in [11] gezeigt wird. Es gilt $E' = \Omega^{-1} \sum_{i=1}^{\Omega} E'_i$, wobei E'_i die Eigenwerte von H' sind und E die Eigenwerte von $H_{N,|\Lambda|}$.

Die Abbildung $s \rightarrow \epsilon(s, |\Lambda|)$ kann aufgrund der Monotonie invertiert werden und ergibt $s(\epsilon(s', |\Lambda|), |\Lambda|) = s'$, wobei mit der mikrokanonischen Entropiedefinition $S(E, H) = \ln \text{Tr} \Theta(E - H)$ der Ausdruck

$$s(\epsilon, |\Lambda|) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} S(\epsilon N^{7/3}, H_{N,|\Lambda|_N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} S(N\epsilon, H'_{N,|\Lambda|}) \quad (5.5.4)$$

folgt.

Wie für die Energie lässt sich die Existenz von

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-7/3} F(N, TN^{4/3}, |\Lambda|_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} F'(N, T, |\Lambda|) := f(T, |\Lambda|) \quad , \quad (5.5.5)$$

also der freien Energie zeigen. $\epsilon(s, |\Lambda|)$ und $f(T, |\Lambda|)$ sind globale Minima der Funktionale $\hat{\epsilon}_s(\rho)$ und $\hat{f}_T(\rho) := \hat{\epsilon}(T, \rho) - T \cdot \hat{s}(T, \rho)$ auf einem geeigneten Raum $\mathcal{D}(|\Lambda|)$, aufgespannt durch positive, normierte Funktionen $\rho : |\Lambda| \rightarrow \mathbb{R}$. Die hier auftretenden Funktionale sind folgendermaßen definiert: $\hat{\epsilon}_s(\rho) := \hat{\epsilon}(T(s, \rho), \rho) := \hat{\tau}(T(s, \rho), \rho) + \hat{w}(\rho)$, wobei $\hat{\tau}(T, \rho) := \int_{|\Lambda|} \theta(T, -\mu(T, \rho(x)))$ die Energie pro Teilchen eines freien Fermigases ist. $\hat{w}(\rho) := -\frac{1}{8\pi} \int_{|\Lambda|} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} d^3x d^3y$ ist das Funktional der potentiellen Energie. $\hat{s}(T, \rho) := \int_{|\Lambda|} \sigma(T, \rho(x)) d^3x$ mit σ als Entropiedichte pro Volumen für ein freies Fermigas mit Temperatur T und Dichte ν .

Um $\hat{\epsilon}_s(\rho)$ und $\hat{f}_T(\rho)$ zu minimieren, muss für $\rho \in \mathcal{D}(|\Lambda|)$ die TF Gleichung der Form

$$\mu(T, \rho(x)) = \hat{\mu}(T, \rho) - \hat{v}(\rho, x) \quad , \quad \forall x \in \Lambda \quad (5.5.6)$$

gültig sein, wobei $\hat{v}(\rho, x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{|\Lambda|} \rho(y) |x-y|^{-1} d^3y$ ist, $\hat{\mu}(T, \rho) := \sup_x (\mu(T, \rho(x)) + \hat{v}(\rho, x))$ und $\mu(T, \rho)$ eindeutig bestimmt ist durch $\nu(T, -\mu(T, \nu')) = \nu'$. Hier bedeutet $\nu(T, a) := \int_0^\infty p^2 \left(1 + e^{(p^2+a)/T}\right)^{-1} dp$. $\mathcal{F}'(T, |\Lambda|)$ sei die Menge aller Lösungen ρ der TF Gleichung (5.5.6), die in $\mathcal{D}(|\Lambda|)$ liegen und $\mathcal{F}(T, |\Lambda|)$ die Menge aller $\rho \in \mathcal{D}(|\Lambda|)$, die \hat{f}_T global minimieren.

Mit dieser Fülle an Definitionen und Eigenschaften (für eine genaue Analyse der Definitionen, siehe [14]) kommt man zu dem in Theroem 5.5.1, weiter unten quantitativ formulierten Ergebnis, dem wir hier die physikalische Interpretation vorwegnehmen:

Für große, jetzt sphärische, rein Radius-abhängige Volumina $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^3$ ist die mikrokanonisch definierte Abbildung $\epsilon \mapsto s(\epsilon, |\Lambda|)$ nicht überall auf $[\epsilon^*, \infty)$ konkav, wobei $\epsilon^*(|\Lambda|) := \epsilon(s \equiv 0, |\Lambda|)$. Es stellt sich heraus, dass ϵ^* konstant ist, unabhängig von $|\Lambda|$. Dies, und die Existenz eines Phasenübergangs im kanonischen Ensemble, wurde bereits in Kapitel 5.4, bzw. detailliert in [9] numerisch gezeigt. Der Phasenübergang entspricht einer Nichtdifferenzierbarkeit von $T \mapsto f(T, |\Lambda|)$ bei einem kritischen Punkt $T = T_c(R)$, der vom Radius R des sphärischen Volumen

Λ abhängt. Pflug berechnet, basierend auf der TF Gleichung, den Limes $|\Lambda| \rightarrow \mathbb{R}^3$ der mikrokanonischen freien Energie $f_m^\pm(\epsilon, |\Lambda|) = \epsilon - T_\pm(s(\epsilon, |\Lambda|), |\Lambda|)s(\epsilon, |\Lambda|)$ und der reskalierten Entropie $(\ln |\Lambda|)^{-1}s(\epsilon, |\Lambda|)$. Diese Limiten existieren und deuten auf einen mikrokanonischen Phasenübergang bei $\epsilon = 0$, also im Grundzustand hin: Bei $\epsilon = 0$ und $|\Lambda| \rightarrow \infty$ haben T und $\hat{\mu}$ im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ keine eindeutige Volumenabhängigkeit mehr. Ein mikrokanonischer Phasenübergang hieße Nichtdifferenzierbarkeit der Entropie (in Theorem 5.5.1, 2. Punkt) als Funktion der Energie und dies bedeutet, dass die reskalierte Temperatur (Theorem 5.5.1, 6. Punkt) nicht eindeutig ist. Dieses Ergebnis lässt sich physikalisch interpretieren als Beginn eines Sternenlebens, d.h. die Ausbildung eines kondensierten Kerns einer interstellaren Wolke. Es folgt nun Pflugs Theorem ²:

Theorem 5.5.1. *Sei $(|\Lambda|_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Menge von beschränkten offenen Regionen, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n| = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln R^+(\Lambda_n))^{-1} \ln R^-(\Lambda_n) = 1$, wobei $R^{-(+)}(\Lambda_n)$ der kleinste (größte) Radius der Sphäre ist, die Λ enthält (in Λ enthalten ist), dann gilt:*

1. $\limsup_{|\Lambda| \rightarrow \infty} (\ln |\Lambda|)^{-1} s(\epsilon, \Lambda) \leq 1 \quad , \quad \epsilon^* \leq \epsilon < \infty \quad ;$
2. $\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} (\ln |\Lambda|_n)^{-1} s(\epsilon, \Lambda_n) = 1 - (\epsilon/\epsilon^*)^{3/7} \theta(-\epsilon) \quad , \quad \epsilon^* \leq \epsilon < \infty \quad ;$
3. $\lim_{R \rightarrow \infty} f_m^\pm(\epsilon, |\Lambda|_R) = (1/3)\epsilon^*(7(\epsilon/\epsilon^*)^{4/7} - 4\epsilon/\epsilon^*) \quad , \quad \epsilon^* \leq \epsilon < \infty$
 $\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} f_m^\pm(\epsilon, \Lambda) = -\infty \quad , \quad 0 < \epsilon < \infty \quad ;$
4. $\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \{\hat{\epsilon}(T, \rho) \mid \rho \in \mathcal{F}'(T, \Lambda)\} = \frac{3}{2}T \quad , \quad 0 < T < \infty;$
5. $\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \{T(\rho \in \mathcal{F}'(T, \Lambda), \hat{\epsilon}(T, \rho)) = \epsilon\} = \frac{2}{3}\epsilon\theta(\epsilon) \quad , \quad \epsilon^* \leq \epsilon < \infty$
6. $\lim_{R \rightarrow \infty} \{T \ln |\Lambda|_R \mid \rho \in \mathcal{F}(T, S_R), \hat{\epsilon}(T, \rho) = \epsilon\} = (\frac{7\epsilon^*}{3})(\epsilon/\epsilon^*)^{4/7} =$
 $\lim_{R \rightarrow \infty} \{-\hat{\mu}(T, \rho) \mid \rho \in \mathcal{F}(T, \Lambda_R), \hat{\epsilon}(T, \rho) = \epsilon\} \quad , \quad \epsilon^* \leq \epsilon < \infty$
7. $\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \{-\hat{\mu}(T, \rho)(\ln |\Lambda|)^{-1} \mid \rho \in \mathcal{F}'(T, \Lambda)\} = T.$

Beweis Für den vollständigen Beweis dieses Theorems, siehe [14]. □

²Mit $\theta(\cdot)$ ist hier die charakteristische Funktion gemeint

5.5.2 Existenzbeweis eines Phasenübergangs – Messer’s Beweis

Wir wollen uns jetzt zum Abschluß dieser Arbeit einem rigorosen Beweis für einen Phasenübergang gravitierender Materie im großkanonischen Ensemble zuwenden. J. Messer erbrachte diesen Beweis 1980 in [18, 1].

³ Die Beweisidee ist die folgende: Man zerlegt die unten angeführte TF Gleichung (5.5.7), die das gravitierende System in einem geeigneten Limes exakt beschreibt (s. Kapitel 5.4 und [11]) in drei Teile und untersucht die Massenverteilung $n(\lambda)$ bzw. die Temperatur $\beta^{-1}(\lambda)$ als Funktion eines reskalierten chemischen Potentials λ , wobei sich herausstellt, dass für eine feste Temperatur und Teilchenzahl zumindest zwei reskalierte chemische Potentiale existieren, was schlussendlich zu einer Uneindeutigkeit der Lösungen der ursprünglichen TF-Gleichung führt. Damit ist dann ein Beweis für die Existenz eines Phasenübergangs (1. Ordnung nach Ehrenfest) gravitierender Materie erbracht. Im Zuge des Beweises kann Messer außerdem zeigen, dass dieser einem Phasenübergang 1. Ordnung nach Ehrenfest entspricht und dass oberhalb einer kritischen Temperatur die Eindeutigkeit der Lösungen der TF Gleichung wieder gegeben ist.

Zur Erinnerung, die TF Gleichung ist für ein gegebenes (β, n, Λ) im großkanonischen Ensemble gegeben durch

$$\rho(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(1 + e^{\beta(p^2 + W(x) - \mu)}\right)^{-1} \quad (5.5.7)$$

$$W[\rho](x) = - \int_{\Lambda_R} \frac{\rho(\vec{y}) d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.5.8)$$

$$n = \int_{\Lambda_R} \rho(x) d^3x \quad , \quad (5.5.9)$$

wobei die Lösungen der selbstkonsistenten Gleichungen (5.5.7) das freie Energiefunktional (3.4.11) minimieren müssen. $\Lambda_R \subset \mathbb{R}^3$ sei eine Kugel mit Zentrum im

³In dieser Arbeit werden wir weitgehend den Ausführungen in [1] folgen und daher uns daher auch an die Notation Messers halten, die in geringem Ausmaß von den vorhergehenden abweicht. Der komplette Beweis findet sich in [18], auf den wir manchmal zurückgreifen werden.

Ursprung mit Radius R . Wir beginnen mit der Definition der drei genannten Konstituenten der TF Gleichung.

Definition 5.5.1 („ n -Gleichung“). Sei

$$g(\beta, y) := c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(1 + e^{\beta(p^2 + y)} \right)^{-1} \quad (5.5.10)$$

für $n > 0$, $\beta > 0$ und für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}$. Die Gleichung

$$\rho(x) = T[\rho](x) := g(\beta, W[\rho](x) - \tilde{\mu}[\rho]) \quad , \quad (5.5.11)$$

mit

$$n = \int_{\Lambda_R} d^3 x T[\rho](x) \quad , \quad (5.5.12)$$

heißt „ n -Gleichung“, wobei das Funktional $\tilde{\mu}[\rho]$ eindeutig durch Gleichung (5.5.12) bestimmt ist.

Definition 5.5.2 („ μ -Gleichung“). Sei wieder $\beta > 0$ und außerdem $\mu \in \mathbb{R}$. Die Selbstkonsistenzgleichung

$$\rho(x) = T_\mu[\rho](x) := g(\beta, W[\rho](x) - \mu) \quad (5.5.13)$$

heißt „ μ -Gleichung“.

Definition 5.5.3 („ λ -Gleichung“). Die Selbstkonsistenzgleichung

$$\rho(x) = G_\lambda[\rho](x) = g(\beta, \bar{W}[\rho](x) + \lambda) \quad (5.5.14)$$

mit

$$\bar{W}[\rho](x) = W[\rho](x) - W[\rho](0)$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt λ -Gleichung.

Hier ist λ ein renormiertes chemisches Potential, das man durch einen shift des negativen chemischen Potentials $-\mu$ um eine Konstante erhält.⁴ Im Folgenden werden wir die Gleichungen (5.5.11), (5.5.13) und (5.5.14) auf Existenz und

⁴Unter Ausnutzung der Poissongleichung $\Delta \bar{W} \propto \rho(x)$ mit einem gemittelten Potential \bar{W} könnten die oben definierten Gleichungen auch als Gleichungen für das Potential geschrieben werden.

Eindeutigkeit von Lösungen untersuchen.

Wir beginnen mit dem

Lemma 5.5.2. *Für alle $\beta > 0$, $R > 0$ und $n > 0$ existiert zumindest eine Lösung der n -Gleichung.*

Beweis Im TF-Limes (d.h. $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-7/3} \langle H_N \rangle = E$, vgl. Gleichung 5.4.8) konvergiert die freie Energie (3.4.11) gegen das Minimum des freien Energie Funktionals. Damit existiert eine Lösung der TF Gleichung (5.5.7). Also existiert im Speziellen mindestens eine Lösung der n -Gleichung. \square

Kommen wir zur μ -Gleichung, die sogleich zugunsten der λ -Gleichung eliminiert wird. Die μ -Gleichung kann man als eine Poisson Gleichung anschreiben, was zu einem Randwertproblem führt. Es zeigt sich, dass die λ -Gleichung das entsprechende Anfangswertproblem darstellt, weswegen es leichter ist, mit der λ -Gleichung zu arbeiten. Wie man in Lemma (5.5.3) sehen wird, existiert für diese Gleichung eine eindeutige Lösung, was im Falle die μ -Gleichung nicht für alle μ gegeben ist.

Lemma 5.5.3. *Für alle $\beta > 0$, $R > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert genau eine eindeutige Lösung der λ -Gleichung.*

Beweis Es existieren zwei Versionen des Beweises:

Bei der ersten Version (s. [8]) wird aus der Annahme, dass die λ -Gleichung äquivalent zur Poisson Gleichung mit einem nichtlinearen Quellterm ist, das Lemma über Standardmethoden der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen bewiesen.

Die zweite Version (ausführlicher dargestellt in [1]) geht aus von einer Supremumsnorm, die die Menge aller möglichen Lösungen der λ -Gleichung in einen vollständigen topologischen Raum überführt. Die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes beendet die Beweisführung. \square

Es bleibt zu klären, ob die Lösungen der TF-Gleichung, die jetzt nur noch aus der n - und der λ -Gleichung besteht, eindeutig sind. Es zeigt sich, dass es in der Tat einen Temperaturbereich gibt, in dem eine Eindeutigkeit der Lösungen gewähr-

leistet ist. Dieser Bereich zeichnet sich dadurch aus, dass darin die thermische Energie $3kT/2$ groß ist gegenüber der gravitativen Bindungsenergie. Andererseits wird gleich gezeigt werden, dass es einen Parameterbereich (N, β, R) gibt, wo es zumindest zwei Lösungen der TF-Gleichungen geben muß. Für das folgende Theorem bedarf es allerdings noch zweier Lemmata als Vorbereitung, die wir hier ohne Beweis angeben:

Lemma 5.5.4. *Sei $\hat{g}(\beta, \mu + \frac{d\kappa}{2} \left\| \frac{1}{|x|} \right\|_p)$ definiert durch*

$$\hat{g}(\beta, y) := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \left(1 + e^{\beta(p^2 - y)} \right)^{-1}$$

mit einem reskaliertem chemischen Potential y und $d = \text{const} \in \mathbb{R}$, sowie $2 < p < 3$, dann hat die Menge

$$\mathcal{N} = \{(n, \beta, R) \in \mathbb{R}_+^3 : \hat{g}\pi\kappa\beta R^2 < 1/2\} \quad (5.5.15)$$

die folgenden Eigenschaften:

- *Ist das Tripel $(n, \beta, R) \in \mathcal{N}$, dann ist $(n\kappa\beta)/(3R) < 2/9$.*
- *$\mathcal{N} \neq \emptyset$*
- *Für jedes Tripel $(n, \beta, R) \in \mathcal{N}$ existiert genau eine eindeutige Lösung der temperaturabhängigen TF-Gleichung für gravitierende Materie.*

Beweis Eine Beweisidee findet sich in [18], S. 118. Der vollständige Beweis ist in [18] nachzulesen. □

Lemma 5.5.5. *Sei ρ_λ die Lösung der λ -Gleichung für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ fest. Dann hat die Abbildung $\Phi : \lambda \mapsto n(\lambda) = \int_{\Lambda_R} \rho_\lambda(x) d^3x$ die Eigenschaften*

- *Die Abbildung $\Phi : \lambda \mapsto n(\lambda)$ ist reell analytisch.*
- *Für jedes $R > 0$, $\beta > 0$ existiert ein λ_0 , sodass $\forall \lambda > \lambda_0$ die Funktion $n(\lambda)$ streng monoton fallend ist.*
- *$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} n(\lambda) = \infty$*
- *$n(\lambda) \leq |\Lambda_R| g(\beta, \lambda)$*

- Es existiert ein $\beta_0 > 0$ und $R_0 > 0$, sodass $n(\lambda)$ in einer Umgebung $\mathcal{U}(\lambda'_0)$ eines festen λ'_0 streng monoton steigend ist.

Beweis Der Beweis findet sich in [1], S. 119. □

Mit diesen Vorbereitungen gelingt es nun, das folgende Theorem zu beweisen:

Theorem 5.5.6 (Messer). *Es existieren $n > 0$, $\beta > 0$ und $R > 0$, sodass die temperaturabhängige TF-Gleichung für rein gravitierende Materie zumindest zwei Lösungen hat.*

Beweis Der Beweis von Theorem 5.5.6 besteht im Wesentlichen aus sechs Schritten:

1. Zuerst untersucht man das Verhalten der Funktion $\beta : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $(n, R, \nu) \mapsto \beta(\nu)$ ⁵.

$\beta(\nu)$ ist implizit gegeben durch

$$n = 4\pi\beta(\nu)^{-3/4} \int_0^{R\beta(\nu)^{-1/4}} d\xi \xi^2 g(1, \xi^{-1}v(\xi) + \nu) \quad , \quad (5.5.16)$$

wobei $v(\xi)$ Lösung der λ -Gleichung ist mit dem Anfangswert $v(0) = v'(0) = 0$. Durch Vergleich der Funktionen β^{-1} und $n(\nu)$ ergibt sich, dass

- $\nu \mapsto \beta^{-1}(\nu)$ reell analytisch ist,
- $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta(\nu) = 0$ und
- $\nu \mapsto \beta^{-1}(\nu)$ ist nicht monoton.

Die Nichtmonotonie der Temperatur β^{-1} ist ein zentraler Punkt in der Beweisführung und wird in den letzten beiden Schritten wichtig werden.

2. Über den Umstand, dass die freie Energie $\Phi(n, \beta, R)$ ein Limes von geeignet reskalierten freien Energien ist, wird gezeigt, dass die Abbildung $\beta \rightarrow \beta\Phi(n, \beta, R)$ auf dem Intervall $\beta \in [0, \infty)$ stetig ist.

⁵Der Einfachheit wegen schreiben nur $\beta(\nu)$ statt $\beta(n, R, \nu)$ für feste n, R

3. Im 3. Schritt wird gezeigt, dass das Funktional $\rho \rightarrow F[\rho](n, \beta, R)$ bezüglich der \mathcal{L}^∞ -Topologie stark stetig ist für feste n und R und für $\beta \in B \subset [0, \infty)$, wobei B definiert ist als das kleinste geschlossene Intervall auf $[0, \infty)$, das alle Elemente der Folge β_i enthält.

Dies lässt sich folgendermaßen exakt formulieren:

Lemma 5.5.7. *Gegeben ein $n > 0$, ein $R > 0$ und eine Folge $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\beta_i \in (0, \infty)$ inverser Temperaturen, die im Limes $i \rightarrow \infty$ gegen ein β_0 konvergiert, also $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i := \beta_0$. Sei nun $\{\rho(\beta_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Lösungen der n -Gleichung, sodass der starke Limes von $\rho(\beta_i)$ für $i \rightarrow \infty$ bezüglich der \mathcal{L}_∞ -Topologie existiert und damit ein ρ_0 definiert, also $s\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i =: \rho_0$. Dann gilt für das freie Energiefunktional*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F[\rho(\beta_i)](n, \beta_i, R) = F[\rho_0](n, \beta_0, R) \quad . \quad (5.5.17)$$

Beweis Der vollständige Beweis findet sich in [18] (Lemma 3.6; S.2916). \square

In diesem Schritt wurde die starke Konvergenz der Dichte $\rho(\beta_i)$ nur postuliert. Dies wird nun folgendermaßen gezeigt.

4. Wir bezeichnen die Lösung der λ -Gleichung für ein festes β_i und ν_i mit $\rho_{(\beta_i, \nu_i)}$. Wählt man nun wie im letzten Schritt die Folge $\{\beta_i\}$ und assoziiert mit jeder Lösung $\rho(\beta_i)$ der n -Gleichung ein $\nu_i = \beta_i \tilde{\lambda}[\rho(\beta_i)]$, dann konvergiert die Dichte

$$s\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{(\beta_i, \nu_i)} = \rho_{(\beta_0, \nu_0)} \quad , \quad (5.5.18)$$

wenn nur $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu_i = \nu_0$ und die λ -Gleichung für ein festes $n u_0$ und β_0 von $\rho_{(\beta_0, \nu_0)}$ gelöst wird.

5. Es wird die Eindeutigkeit der Lösung der TF-Gleichung postuliert und die Konsequenzen aus dieser Annahme studiert, bevor im letzten Schritt gezeigt wird, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt und somit Theorem 5.5.6 bewiesen ist.

Annahme

Für jedes (n, β, R) existiert genau eine Lösung ρ^{TF} der TF-Gleichung.

Daraus folgt vor allem für die Abbildung $\beta \mapsto \nu^{TF}(\beta) := \beta \tilde{\lambda} [\rho^{TF}(\beta)]$, dass sie wohl definiert ist. Wie im ersten Schritt behauptet wurde, ist die Funktion $\beta^{-1}(\nu)$ jedoch nicht monoton, woraus folgt, dass $\nu^{TF}(\beta)$ einen Sprung aufweist. Es existieren also Teilfolgen β_{i_j} und β_{i_k} , die beide gegen β_0 konvergieren, obwohl

$$\lim_{i_j \rightarrow \infty} \nu^{TF}(\beta_{i_j}) =: \nu_1 \neq \nu_2 := \lim_{i_k \rightarrow \infty} \nu^{TF}(\beta_{i_k}) \quad . \quad (5.5.19)$$

6. Messer zeigt nun, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt, indem er die Lösung der TF-Gleichung in Abhängigkeit von ν_1 und ν_2 vergleicht. Diese Lösung $\rho^{TF} = \rho_{\nu^{TF}}$ minimiert laut Annahme das freie-Energie Funktional und ergibt somit die freie Energie Φ selbst. Man erkennt also aus dem fünften Schritt, dass

$$\lim_{i_j \rightarrow \infty} F_\rho [\rho_{\nu^{TF}(\beta_{i_j}), \beta_{i_j}}] (\beta_{i_j}) = F_\rho [\rho_{\nu_1, \beta_0}] (\beta_0) \quad (5.5.20)$$

und ebenso

$$\lim_{i_k \rightarrow \infty} F_\rho [\rho_{\nu^{TF}(\beta_{i_k}), \beta_{i_k}}] (\beta_{i_k}) = F_\rho [\rho_{\nu_2, \beta_0}] (\beta_0) \quad . \quad (5.5.21)$$

Wie wir im zweiten Schritt der Beweisführung gezeigt haben, ist die freie Energie stetig, also muß

$$\begin{aligned} F_\rho [\rho_{\nu_1, \beta_0}] (\beta_0) &= \lim_{i_j \rightarrow \infty} \Phi(n, \beta_{i_j}, R) = \Phi(n, \beta_0, R) \\ &= \lim_{i_k \rightarrow \infty} \Phi(n, \beta_{i_k}, R) = F_\rho [\rho_{\nu_2, \beta_0}] (\beta_0) \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

gelten. Mit $\nu_1 \neq \nu_2$ folgt aber sofort

$$\rho_{\nu_1, \beta_0} \neq \rho_{\nu_2, \beta_0} \quad , \quad (5.5.23)$$

was im Widerspruch zur Annahme steht, dass es genau eine Lösung der TF-Gleichung gibt. Gemeinsam mit dem Beweis, dass die TF-Gleichung zumindest eine Lösung hat, ist der Beweis für mindestens zwei Lösungen erbracht. (Für mehr Details des Beweises sei auf [1] und [18] verwiesen.) \square

Mit der Tatsache, dass es mindestens zwei, das freie-Energie Funktional minimierende Funktionen gibt, können wir das folgende Theorem zu formulieren:

Theorem 5.5.8. *Es existieren Zahlen $n > 0$, $\beta > 0$ und $R > 0$, für die ein System aus gravitierenden Fermionen im thermodynamischen TF Limes einen Phasenübergang erster Ordnung nach Ehrenfest aufweist.*

Beweis Wie im Beweis für Theorem 5.5.6 gezeigt wurde, gibt es zumindest zwei Funktionen ρ_1^{TF} und ρ_2^{TF} , sodass

$$F_\rho [\rho_1^{TF}] = \Phi_{W(n)} = F_\rho [\rho_2^{TF}] \quad . \quad (5.5.24)$$

Betrachten wir das chemische Potential, gegeben durch

$$\tilde{\mu} [\rho^{TF}] = \frac{\partial \Phi_{W(n)}(n, \beta, R)}{\partial n} \quad , \quad (5.5.25)$$

so existiert diese Ableitung überall, genau dann, wenn ρ^{TF} eindeutig ist. Die beiden Funktionen ρ_1^{TF} und ρ_2^{TF} führen zwar zur selben freien Energie, aber die chemischen Potentiale $\tilde{\mu} [\rho_1^{TF}]$ und $\tilde{\mu} [\rho_2^{TF}]$ sind laut Theorem 5.5.6 unterschiedlich, was zur Folge hat, dass es aufgrund des Skalierungsverhaltens von $(n_0, \beta_0, R_0) \rightarrow (n_0, \gamma^{-4/3}\beta_0, \gamma^{-1/3}R_0)$ für ein beliebiges, reelles $\gamma > 0$ einen eindimensionalen Unterraum des Parameterraums gibt, in dem das chemische Potential (5.5.25) nicht existiert.

Analog könnte man den Druck, also die erste Ableitung der freien Energie nach dem Volumen betrachten. Man findet hier ebenfalls eine Unstetigkeit des Drucks. \square

Der Beweis für die Existenz einer Diskontinuität der thermodynamischen Parameter, abgeleitet aus der Thomas–Fermi Theorie gravitierender Materie komplettiert diesen Abschnitt über die quantenmechanische Modellsysteme.

Kapitel 6

Abschließende Bemerkungen

Wir haben gesehen, dass die thermodynamische Behandlung gravitierender Systeme mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist. Diese tauchen hauptsächlich wegen zwei besonderer Umstände auf:

- Die Newtonsche Gravitation ist langreichweitig, weswegen es unmöglich ist, untereinander nicht wechselwirkende Subsysteme zu betrachten und
- die Nichtextensivität der Energie, weswegen die Unterschiede in der kanonischen und mikrokanonischen Behandlung auftreten.

In den klassischen Modellen findet man bereits die Inäquivalenz der statistischen Ensembles und das von Astronomen vorhergesagte Gebiet negativer spezifischer Wärme. Diese Modelle sind gekennzeichnet durch die Verwendung eines Potentials, das die Extensivität der Energie verhindert. Dadurch ist es nicht möglich, die kanonische Zustandssumme aus der mikrokanonischen herzuleiten, wie das beim idealen Gas der Fall ist. Thirring hat als erster realisiert, dass dafür nicht notwendigerweise ein Newtonsches Gravitationspotential verwendet werden muß (siehe Kapitel 4.2.3).

Wie bereits erwähnt ist der Schritt zur quantenmechanischen Beschreibung notwendig, weil das thermodynamische Verhalten von Fermionen ein quantitativ anderes Ergebnis erwarten lässt. Außerdem gelingt es unter anderem mit Methoden

der Thomas–Fermi Theorie rigorose Ergebnisse zu erhalten. Zum einen lässt sich die thermodynamische Instabilität gravitierender Materie mithilfe Theorem 3.5 zeigen und zum anderen die Existenz eines Phasenübergangs in einem geeigneten Limes wie in Kapitel 5.5.2.

Abgesehen von zwei neueren Arbeiten von Posch und Thirring [25, 24], die sich mit Computersimulationen gravitierender Systeme beschäftigen, steht die Forschung auf diesem Gebiet weitgehend still. Es wäre daher, vor allem in Bezug auf die Grenzen der hier präsentierten Modelle wünschenswert, Methoden der Nichtgleichgewichtsthermodynamik anzuwenden. Zwei Arbeiten von Lieb und Yau [31] beschäftigen sich mit der Stabilität speziell relativistischer Materie.

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Jakob Yngvason dafür bedanken, dass er es mir ermöglicht hat, auf diesem interessanten Gebiet zu arbeiten und für die vielen Stunden, in denen er sich für meine Anliegen und Fragen Zeit nahm.

Mein Dank gilt weiters Herrn Professor Walter Thirring für den „Privatunterricht“ in meinem Diplomarbeitsthema, mit dem er so eng verbunden war und ist.

Ich möchte ganz herzlich meiner Familie danken, vor allem meiner Mutter und meinen beiden Schwestern, die das gesamte Studium hindurch an mich geglaubt und mich unterstützt haben. Außerdem möchte ich Familie Dr. Eder danken, ohne deren Unterstützung dieses Studium nicht möglich gewesen wäre.

Ein großes Dankeschön widme ich auch einer Vielzahl an Studienkollegen, allen voran Freunden wie Hedda Gressel, Andreas Kastner, Mag. Martin Leitner, Albert Huber, Dipl.-Phys. Eric Morfa Morales, Mag. Jelena Horky und vielen, vielen mehr, für unzählige, anregende Diskussionen, Schach- und Gopartien in der Copyteria und sehr viel Spaß. Meiner Freundin Sabrina Rant danke ich von ganzem Herzen dafür, dass sie mich während des Verfassens dieser Arbeit manchmal in das Leben „da draußen“ entführt hat und für die vielen schönen Stunden abseits der Physik.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Messer. *Temperature Dependent Thomas-Fermi Theory*. Springer Verlag, 1981.
- [2] Emden. *Gaskugeln*. Leipzig, 1907.
- [3] S. Chandrasekhar. *Introduction to the Study of Stellar Structure*. University of Chicago Press, 1939.
- [4] A. S. Eddington. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, 1962.
- [5] V. A. Antonov. Most probable phase distribution in spherical star systems and conditions for its existence. *Vest. Leningrad Univ.*, 7, 1962.
- [6] D. Lynden-Bell und R. Woods. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *Non. Not. R. Astr. Soc.*, 138:495–525, 1968.
- [7] W. Thirring. Systems with negative specific heat. *Z. f. Physik*, 235:339, 1970.
- [8] W. Thirring P. Hertel. Thermodynamic instability of a system of gravitating fermions. In *Quanten und Felder (Ed. H.P. Dürr)*, 1971.
- [9] P. Hertel und W. Thirring. A soluble model for a system with negative specific heat. *CERN Preprint*, 1186, 1970.
- [10] P. Hertel und W. Thirring. Free energy of gravitating fermions. *Commun. math. Phys.*, 24:22–36, 1971.

- [11] W. Thirring P. Hertel, H. Narnhofer. Thermodynamic functions for fermions with gravostatic and electrostatic interactions. *Commun. math. Phys.*, 28:159–176, 1972.
- [12] Aronson und Hanson. Thermal equilibrium states of a classical system with gravitation. *Astrophys. J.*, 177:145, 1972.
- [13] J. Messer. The pressure of fermions with gravitational interaction. *Z. Physik B*, 33:313, 1979.
- [14] A. Pflug. Gravitating fermions in an infinite configuration space. *Comm. Math. Phys.*, 78:83, 1980.
- [15] H. Narnhofer und W. Thirring. Asymptotic exactness of finite temperature thomas-fermi theory. *Annals of Physics*, 134:128, 1981.
- [16] J. Yngvason B. Hauksson. Asymptotic exactness of magnetic thomas-fermi theory at nonzero temperature. *Journal of Statistical Physics*, 116:523, 2004.
- [17] W. Thirring. *A course in Mathematical Physics 4, Quantum mechanics of large systems*. Springer, 1980.
- [18] J. Messer. On the gravitational phase transition in the thomas-fermi model. *J. Math. Phys.*, 22, 1981.
- [19] P. Landsberg. Is equilibrium always an entropie maximum. *J. Stat. Phys.*, 22:12, 1981.
- [20] H. Posch und W. Thirring H. Narnhofer. Dynamics of unstable systems. *Phys. Rev. A*, 42, 1990.
- [21] T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Physics Reports*, 188:285–362, 1990.
- [22] D. Lynden Bell. Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry. *Physica A*, 263:293–304, 1999.
- [23] *private communication with J. Yngvason, W. Thirring, H. Narnhofer and others.*

- [24] H. A. Posch und W. Thirring. Thermodynamic instability of a confined gas. *PhysRevE*, 74, 2006.
- [25] H. Posch und W. Thirring. stellar stability by thermodynamic instability. *Phys. Rev. Letters*, 95, 2005.
- [26] E. Lifschitz L. Landau. *Lehrbuch der theoretischen Physik 1, Mechanik*. Deutsch (Harri), 1997.
- [27] C.N. Yang und T.D. Lee. Statistical properties of equations of state and phase transitions. i. theory of condensation. *Physical Review*, 87/3:404, 1952.
- [28] D. Ruelle. *Statistical Mechanics - Rigorous Results*, p. 190. Imperial College Press, 1968 (Reprinted 2007).
- [29] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 6 - Statistische Physik*. Springer, 2007.
- [30] E. Lieb. Thomas-fermi and related theories of atoms and molecules. *Rev. Mod. Phys.*, 53:603–641, 1981.
- [31] Selected Papers of E. Lieb. *The Stability of Matter: From Atoms to Stars*, chapter 5, pages 362–431. Springer, 1991.
- [32] E. Lieb und H. Yau. The chandrasekhar theory of stellar collapse as the limit of quantum mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 112:147–174, 1987.
- [33] E. Lieb und H. Yau. A rigorous examination of the chandrasekhar theory of stellar collaps. *Astrophys. J.*, 323:140–144, 1987.
- [34] B. Baschek A. Unsöld. *Der neue Kosmos*. Springer, 2005.
- [35] J. M. Lévy-Leblond. Nonsaturation of gravitational forces. *J. Math. Phys.*, 10, 1969.
- [36] W. Thirring. *The Stability of Matter: From Atoms to Stars, A Selecta of E. Lieb*, chapter Introduction, pages 1–8. Springer, 1991.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 wurden mit dem Programm *Mathematica 5.0* generiert und mit dem Vektorgraphikprogramm *inkscape* bearbeitet. Diese Arbeit wurde mithilfe der freeware LaTeX verfasst.

LEBENS LAUF

NAME Kopsky, Georg Karl

GEBURTSTAG 05.11.1981

GEBURTSORT Wiener Neustadt, Österreich

NATIONALITÄT Österreich

FAMILIENSTAND Ledig

E-MAIL `georg.kopsky@univie.ac.at`

SPRACHEN Deutsch (Muttersprache), Englisch

AUSBILDUNG & BERUF

- seit 10/2005 **Diplomstudium** der Physik an der Universität Wien
- Betreuer der Diplomarbeit: Prof. J. Yngvason
 - Titel der Diplomarbeit: *Thermodynamik gravitierender Systeme*
- seit 03/2009 **Tutor** an der Fakultät für Physik
- 01/2005-10/2009 **Laborgehilfe** Zahnarztpraxis, Ordination Dr. Eder, 2700 Wr. Neustadt
- 03/2004-10/2005 **Studienberechtigungsprüfung für Physik**
- außerordentliches Studium an der Universität Wien
 - Bestanden
- 04/2001-09/2004 **Militärperson auf Zeit**
- beim PzGrenBat 35/2, Österreichisches Bundesheer
 - Dienstgrad: Korporal
- 09/2000-04/2001 **Grundwehrdienst**
- beim PzGrenBat 35/2, Österreichisches Bundesheer
- 09/1992-06/2000 **Schulbildung**
- im Bundesrealgymnasium Gröhrmühlgasse Wr. Neustadt
 - Abgebrochen
-

Unterschrift